المدخل إلى تدريب

الفيزياء الأولمبي

الميكانيكا-وميكانيكا الأجسام الصلدة

IPhO

أول كتاب عربي للتدريب على أولمبياد الفيزياء الدولي

د. زهير فياض شحادة

الأستاذ المشارك بقسم الفيزياء
جامعة الطائف

د. نجم بن مسفر الحصيني

الأستاذ المشارك بقسم الفيزياء-جامعة الطائف
وقائد الفريق السعودي لأوليمبياد الفيزياء الدولي

أ. فؤاد بدر شريتح

المحاضر سابقاً بقسم الفيزياء
جامعة الطائف

دار عالم الكتب
للطباعة والنشر والتوزيع

المدخل إلى تدريب

الفيزياء الأولمبي

الميكانيكا-وميكانيكا الأجسام الصلدة

IPhO

أول كتاب عربي للتدريب على أولمبياد الفيزياء الدولي

د. زهير فياض شحادة

الأستاذ المشارك بقسم الفيزياء

جامعة الطائف

د. نجم بن مسفر الحصيني

الأستاذ المشارك بقسم الفيزياء - جامعة الطائف

وقائد الفريق السعودي لأولمبياد الفيزياء الدولي

أ. فؤاد بدر شريتح

المحاضر سابقاً بقسم الفيزياء - جامعة الطائف

دار عالم الكتب

للطباعة والنشر والتوزيع

ح دار عالم الكتب للنشر والتوزيع، ١٤٣٤هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الحصيني، نجم مسفر مصلح

المدخل إلى تدريب الفيزياء الأولمبي / نجم مسفر مصلح الحصيني.

الرياض، ١٤٣٤هـ

٣٨٤ص ؛ ١٧×٢٤ سم

ردمك: ٩٧٨-٦٠٣-٨٠٠٩-٤٧-٥

١- الفيزياء

أ. العنوان

ديوي: ٥٣٠ ١٤٣٤/٤٤٣

رقم الإيداع: ١٤٣٤/٤٤٣

ردمك: ٩٧٨-٦٠٣-٨٠٠٩-٤٧-٥

الطبعة الأولى

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣م

دار عالم الكتب

دار عالم الكتب للطباعة والنشر والتوزيع

الإدارة

الرياض - طريق الملك عبدالله

هاتف: ٤٥٥٥٥٢٠ - فاكس: ٤٥٣٨٥٣٣

ص.ب: ٦٤٦٠ الرياض: ١١٤٤٢

مطابع الشبانات الدولية

الرياض - طريق الخرج - مخرج هيت

هاتف: ٢١٤١١٠٠ - فاكس: ٢١٤١١٦٦

بريد إلكتروني: alamalkutub@alshabanatgroup.com

www.alshabanatgroup.com

التصميم والإخراج الفني: وكالة الفن الثامن للدعاية والإعلان

الإهداء

نهدي هذا العمل لبُناة المستقبل
أبنائنا وبناتنا من المتميزين والمبدعين

بسم الله الرحمن الرحيم

المحتويات

تقديم ١١

مقدمة عن الأولمبياد ١٣

الوحدة الأولى الكميات الفيزيائية ونظرية الأبعاد

(١-١) الكميات الفيزيائية ١٩

(١-٢) نظرية الأبعاد ٢٣

أمثلة محلولة ٢٤

أسئلة وتمارين ٣١

الوحدة الثانية المتجهات

(٢-١) الكميات الفيزيائية ٣٧

(٢-٢) جمع وطرح المتجهات ٤٠

أمثلة محلولة ٤٣

أمثلة محلولة (باستخدام طريقة المركبات) ٥١

أسئلة وتمارين ٥٦

الوحدة الثالثة وصف حركة جسيم

(٣-١) حركة جسيم في بعد واحد ٦٣

(٣-٢) حركة جسيم في بعد واحد بتسارع ثابت ٦٩

(٣-٣) السقوط الحر ٧١

(٣-٤) حركة جسيم في بعدين ٧٣
أمثلة محلولة ٨١
أسئلة وتمارين ٨٨

الوحدة الرابعة قوانين نيوتن

(٤-١) قوانين نيوتن ٩٥
(٤-٢) أنواع القوى ١٠٠
أمثلة محلولة ١٠٧
أسئلة وتمارين ١١٥

الوحدة الخامسة الحركة الدائرية

(٥-١) الحركة الدائرية المنتظمة ١٢٣
(٥-٢) حركة الأقمار الصناعية ١٣٠
أمثلة محلولة ١٣٧
أسئلة وتمارين ١٤٠

الوحدة السادسة الشغل والطاقة

(٦-١) الشغل ١٤٧
(٦-٢) طاقة الحركة ١٥٠
(٦-٣) طاقة الوضع ١٥٢
(٦-٤) القدرة ١٥٩
أمثلة محلولة ١٦٢
أسئلة وتمارين ١٧٠

الوحدة السابعة المرونة

(٧-١) المرونة والقوى الشادة والضاغطة ١٧٩

(٧-٢) قانون هوك والطاقة المختزنة في زنبرك ١٨٥

أمثلة محلولة ١٩٣

أسئلة وتمارين ١٩٨

الوحدة الثامنة كمية الحركة

(٨-١) كمية الحركة الخطية والدفع ٢٠٥

(٨-٢) مبدأ حفظ كمية الحركة ٢١١

(٨-٣) التصادمات ٢١٤

(٨-٤) حركة جسيم متغير الكتلة ٢٢١

أمثلة محلولة ٢٢٤

أسئلة وتمارين ٢٣٠

الوحدة التاسعة كاينمتيكا الحركة الدورانية

(٩-١) الحركة الدورانية والإزاحة الزاوية ٢٣٩

(٩-٢) قوانين وصف الحركة الدورانية ٢٤٦

أمثلة محلولة ٢٥٢

أسئلة وتمارين ٢٥٧

الوحدة العاشرة ديناميكا الحركة الدورانية

(١٠-١) تأثير القوى والعزوم على حركة الأجسام الصلبة (الجاسئة) ٢٦٥

(١٠-٢) مركز الكتلة ٢٧٤
(١٠-٣) الشغل الدوراني والطاقة ٢٨٧
أمثلة محلولة ٢٩٤
أسئلة وتمارين ٣٠٥

الوحدة الحادية عشرة حركة المحاور المرجعية

(١١-١) مقدمة ٣١٧
(١١-٢) الحركة العامة للمحاور (الانتقالية والدورانية) ٣٢٠
أمثلة محلولة ٣٢٣
أسئلة وتمارين ٣٢٩

الملاحق

ملحق (١): متجهات الوحدة العمودية ٣٣٣
ملحق (٢): بعض الثوابت الفيزيائية ٣٤٣
ملحق (٣): معاملات المرونة لبعض المواد ٣٤٤
ملحق (٤): مركز الكتلة لبعض الأجسام المنتظمة ٣٤٥
ملحق (٥): عزم القصور الذاتي لبعض الأجسام الصلبة المتجانسة ٣٤٦
اختبار مستوى ٣٤٧
الأجوبة ٣٥٥
المراجع ٣٧٠
ثبت المصطلحات (عربي - إنجليزي) ٣٧٣

تقديم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله الأمين وعلى آله وصحبه أجمعين، ثم أما بعد،

فلا يخفى على أحد أهمية الأنشطة اللاصفية في صقل مواهب الطلاب وإبراز جيل من الشباب ذي شخصية متكاملة، يقال هذا الكلام عن الأنشطة اللاصفية العامة، فكيف بالأنشطة اللاصفية ذات الطابع العلمي البحت كالمسابقات العلمية والتي يعد من أبرزها الأولمبيادات العلمية كأولمبياد الفيزياء الدولي، إن هذه المنافسات الدولية تعد تظاهرة علمية كبرى للكشف عن الموهوبين، المميزين في شتى مجالات العلوم، وهي في ذات اللحظة نشر لثقافة المنافسات العلمية.

ومن هذا المنطلق، يأتي تأليفنا لهذا الكتاب كخطوة أولى في طريق تدريب أبنائنا الطلاب على مفردات أولمبياد الفيزياء الدولي، ويحتوي على موضوعات الميكانيكا وميكانيكا الأجسام الصلدة طبقاً لمفردات أولمبياد الفيزياء الدولي المعتمدة، وننوي إن كان في العمر متسع أن نكمل هذه السلسلة حتى نغطي كافة موضوعات هذه المنافسة الدولية السنوية بمشيئة الله تعالى.

وانطلاقاً من الطبيعة التدريبية لهذه المنافسات، فقد حرصنا على تدعيم هذا الكتاب بعدد كبير من الأمثلة والتمارين المصورة، إضافةً إلى ملفات المحاكاة، أملاً في جعل الفائدة أكبر وأعظم وضمّناه كذلك أسئلة تحدي واختبار لتحديد المستوى. ويجدر التنويه هنا إلى أن الطالب الذي يستطيع التعامل مع أسئلة وتمارين الوحدات وحلها يكون مستواه ممتازاً، أما الطالب الذي يفكر بطريقة علمية صحيحة ويضع

أساسيات ومعادلات لحل «اختبار مستوى» فإننا نعتقد بأنه مؤهل لتحقيق نتائج جيدة في الأولمبياد.

ولعلمنا أن الكمال لله وأن كل عمل بشري يعتريه النقص، فإننا نطلب من جميع المعلمين والمدربين تزويدنا بأي ملاحظات أو اقتراحات سعياً لتطوير هذا المشروع الذي سيساهم في رفعة أجيالنا القادمة. آملين أن يحقق الله به المقصود، وأن يعم به النفع، إنه ولي ذلك القادر عليه .

المؤلفون

مقدمة عن الأولمبياد

عقد الاولمبياد الدولي للفيزياء بين طلاب الثانوية العامة و مدارس التعليم الفني لأول مرة عام ١٩٦٧ في دولة بولندا، و بالتحديد في مدينة وارسو تحت رعاية Prof. Czeslaw Scistawski. وهنا يجب الإشارة إلى أن فكرة انعقاد الاولمبياد ترجع إلى ثلاثة علماء من ثلاث دول كانت تتبع محور الاتحاد السوفيتى في منتصف القرن الماضي و هم :

١- Prof. Czeslaw Scislowski, Poland

٢- Prof. Rostislav Kostial, Czechoslovakia

٣- Prof. Rudolf Kunfalvi, Hungary

حيث تبنى هؤلاء العلماء فكرة إنشاء أولمبياد للفيزياء بين طلاب الثانوية العامة و ما في مستواها من التعليم الفني أسوة بالاولمبياد الدولي في الرياضيات الذي انعقد لأول مرة عام ١٩٥٩، و بعد مشاورات مكثفة بين العلماء الثلاثة استقر الحال على إقامة أول اولمبياد في مدينة وارسو برئاسة Prof. Czeslaw Scislowski ، كما تم الاتفاق على عقد الاولمبياد مرة كل عام بطريقة دورية مثل الاولمبياد الدولية في الرياضيات. وهنا تجدر الملاحظة بأن الفرق الجوهري بين أولمبياد الفيزياء وأولمبياد الرياضيات هو وجود مسائل عملية في الأول ما يجعل من عملية إعداده وتنظيمه أكثر تعقيداً وأبهظ ثمناً من أولمبياد الرياضيات .

قبل موعد انعقاد الدورة الأولى بعدة شهور أرسل منظمو الدورة دعوات إلى خمس دول :

.Bulgaria, Czechoslovakia, Romania, Hungary and Poland

حيث كان تشكيل الفرق المشاركة عبارة عن ثلاثة طلاب بالإضافة إلى مشرف واحد، كما اتفق أيضا على تشكيل أعضاء اللجنة الاولمبية من مشرفي الفرق المشاركة، و هي اللجنة المسئولة عن وضع آلية التنافس بين الفرق المشاركة. وقد كانت فعاليات الدورة الاولمبية الأولى ممتدة على مدى يومين متصلين حيث خصص اليوم الأول للمسائل النظرية و التي كان عددها أربع مسائل، أما اليوم الثاني فقد خصص للمسائل العملية حيث كانت عبارة عن مسألة واحدة فقط.

قبل انعقاد الدورة الاولمبية الثانية في بودابست (عاصمة دولة المجر) عام ١٩٦٨ أعدت اللجنة الاولمبية المشكلة من مشرفي الفرق المشاركة في الدورة الأولى، مقترح بشروط المسابقة الاولمبية، و مفردات الفيزياء Syllabus الذي على أساسه سوف يتم التنافس بين الفرق المشاركة، و تم إرساله لعدد من دول الاتحاد السوفيتى في ذلك الوقت وبذلك انعقدت الدورة الثانية بمشاركة ثماني دول :

German Democratic Republic, Soviet Union, Bulgaria, Hungary, Poland, Romania, Czechoslovakia, Yugoslavia

تم في هذه الدورة اعتماد مفردات الفيزياء و اللائحة التنفيذية Statutes للدورات الاولمبية التالية.

وفي الدورة الثالثة عام ١٩٦٩ و التي انعقدت في دولة Czechoslovakia، وبالتحديد في مدينة برنو، حدث تعديل بسيط على تشكيلة الفرق المشاركة حيث كانت تتكون من خمسة تلاميذ بالإضافة إلى مشرفين اثنين. وفي دورات عام ١٩٧٠، ١٩٧١، ١٩٧٢ كانت الدول المشاركة هي نفس الدول في الدورة الثالثة إلا أن عدد الطلاب في كل فريق تشكل من ستة طلاب، كما شاركت فرنسا لأول

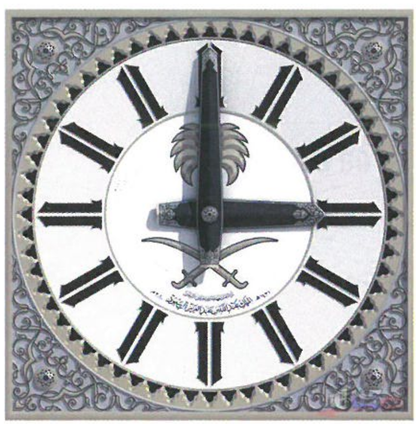
مرة في الدورة السادسة عام ١٩٧٢. أما في عام ١٩٧٣ فلم تنعقد الدورة الأولمبية، ليعاد عقدها عام ١٩٧٤ لثاني مرة في دولة بولندا، وتم فيها الاتفاق على تثبيت عدد الطلاب في الفرق إلى خمسة بالإضافة إلى مشرفين اثنين، كما تم اعتماد الآتي.:

- لائحة أسئلة المسابقة هي أربع مسائل نظرية لليوم الأول و مسألة واحدة عملية لليوم الثاني.
- اللغات المعتمدة في البطولة هي اللغة الانجليزية و اللغة الروسية فقط (يعنى أن أسئلة الاختبارات تأتى باللغتين اللغة الانجليزية و اللغة الروسية فقط).
- يحق الإجابة باللغة الأم لجميع الفرق.
- تخصيص يوم راحة بين يوم الاختبار الأول و الثاني.
- تشكيل لجنة سكرتارية من ذوى الخبرة تقوم بمهمة التنظيم و تلبية طلبات جميع الفرق المنافسة.

و أخيرا في عام ١٩٨٣ انعقدت الدورة الاولمبية في رومانيا للمرة الثانية حيث تم التركيز أكثر على لائحة المسابقة و كيفية تحديد الفريق الفائز كالتالي :

- يوم الاختبار الأول يحتوي على عدد ثلاث مسائل نظرية.
- مدة الاختبار خمس ساعات.
- يوم راحة .
- يوم الاختبار الثاني للفيزياء العملية (مسألة أو اثنتين).

منذ الدورة السابعة عشر ١٩٨٦ و حتى الآن أصبحت الدورة الأولمبية للفيزياء ذات شهرة عالمية حيث أصبح لها قواعد معتمدة و مفردات مقررة متفق عليها كما تم إنشاء موقع خاص بهذه المسابقة.



الوحدة الأولى

الكميات الفيزيائية ونظرية الأبعاد

الكميات الفيزيائية والأبعاد

- ما هي وحدات القياس؟
- عندما تقرأ رقما مجردا 50 ماذا يعني لك ؟
- ما هي وحدات قياس السرعة في عداد السيارة التي تركبها كل يوم؟
وهل لاحظت وجود وحدات أخرى لسيارات مختلفة؟

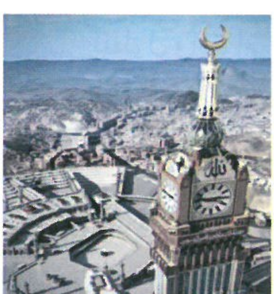
(١-١) الكميات الفيزيائية

الكمية الفيزيائية:

هي أي صفة للمادة يمكن قياسها مثل الطول ودرجة الحرارة الخ، وتقسم الكميات الفيزيائية إلى:

- **كميات فيزيائية أساسية:** وهي الكميات التي تعرف بذاتها ومنها:

الطول – الكتلة – الزمن – درجة الحرارة – شدة التيار الكهربائي.....الخ.



شكل (١-١) : ساعة مكة المكرمة

- **كميات فيزيائية مشتقة:** وهي الكميات التي تعرف بدلالة غيرها من الكميات الأساسية (تشتق من الكميات الأساسية) مثل الحجم – المساحة – الكثافة – السرعة – التسارع ......الخ.

إن تجارب الفيزياء تتطلب قياس كميات مختلفة، وكثيرٌ من الجهد يذهب في جعل هذه القياسات ممكنة ودقيقة.

والخطوة الأولى لتأكيد صحة هذه القياسات هي تعريف الوحدات التي تقاس بها هذه الكميات، حيث أن وحدة القياس تعرف بأنها دليل يدل على نوع الكمية الفيزيائية. وسنتعرف في هذا الفصل بشكل خاص، وفي هذا الكتاب بشكل عام، على الكثير من الكميات الفيزيائية ووحدات قياسها.

سنركز في هذا الكتاب على نظام الوحدات العالمي (International System of Units أو باللغة الفرنسية Systéme International) والذي يرمز له بـ SI أو MKS والذي يستخدم، وباتفاق دولي، المتر (m) كوحدة للطول والكيلوغرام (kg) كوحدة للكتلة والثانية (s) كوحدة للزمن. ونشير إلى أن هناك نظامان آخران للوحدات :

١- نظام القياس الفرنسي CGS والذي يستخدم السنتمتر (cm) كوحدة للطول والغرام (g) كوحدة للكتلة والثانية (s) كوحدة للزمن.
٢- نظام الهندسة البريطاني BES والذي يستخدم القدم (ft) كوحدة للطول والصلج (sl) كوحدة للكتلة والثانية (s) كوحدة للزمن.

ويمكن تلخيص أنظمة القياس ووحداتها للكميات الفيزيائية الثلاث (الطول، الكتلة، الزمن) في الجدول التالي:

الكمية الأساسية / نظام القياس	الطول	الكتلة	الزمن
الدولي (MKS)	متر (m)	كيلوغرام (kg)	ثانية (s)
الفرنسي (CGS)	سنتمتر (cm)	غرام (g)	ثانية (s)
الانجليزي (BES)	قدم (ft)	صلج (sl)	ثانية (s)

وتجدر الإشارة إلى أن وحدات الطول والكتلة والزمن، في النظام العالمي للوحدات، هي وحدات أساسية. وتسمى وحدات الكميات الفيزيائية الأخرى التي تتكون من هذه الوحدات الأساسية بالوحدات المشتقة كوحدات الحجم والكثافة والسرعة والتسارع... إلخ.

أحيانا تكون قيمة كمية فيزيائية، سواء بالوحدات الأساسية أو المشتقة، كبيرة جداً أو صغيرة جداً.وفي مثل هذه الحالات يستحسن استخدام قوى (أس) العدد 10 كبادئات للوحدات الاعتيادية (الأساسية أو المشتقة). فمثلا 1000m أو 10^3 m يعبر عنها كيلومتر (1km) وكذلك 0.001m أو 10^{-3} m تسمى ملليمتر (1mm) وهكذا.

ويمكن تلخيص هذه البادئات التي تشير إلى قوى العدد ١٠ بالجدول التالي:

البادئة	الرمز	العامل
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hecto	h	10^{2}
Deka	Da	10^{1}
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}

إن أي كمية فيزيائية، كالطول مثلا، يمكن قياسها بعدة وحدات مختلفة لذا فإنه يلزم معرفة التحويل من وحدة لأخرى. فعلى سبيل المثال فإن المتر يساوي 3.281 قدم وعليه يمكن تحويل الأمتار إلى أقدام أو العكس. لديك برنامج لتحويل الوحدات في القرص المرفق.

(١-٢) نظرية الأبعاد

الأبعـاد:

كما رأينا فإن العديد من الكميات الفيزيائية تظهر بتخصيص كمية ووحدة لها، فمثلا بعد أقرب بقالة لمنزلك قد تكون $100m$، أو قد تكون سرعة سيارة $25m/s$. إذن كل كمية، وبناءً على طبيعتها الفيزيائية، تتطلب نوع محدد من الوحدات، فالمسافة يجب أن تقاس بوحدة الطول (متر، قدم، ميل) ولا يمكن أن تقاس بوحدة زمن، وبالمثل فإن سرعة جسم يجب أن توصف بوحدة طول مقسومة على وحدة زمن.

في الفيزياء، التعبير بالكلمة بعد (dimension) يستخدم للدلالة على الطبيعة الفيزيائية للكمية ونوع الوحدة (الوحدات) المستخدمة لتعيينها. فالمسافة لها بعد طول (Length) ويرمز له بالرمز [L] لكن الزمن (Time) له بعد يرمز له بالرمز [T]، وأيضا الكتلة (Mass) لها بعد يرمز له بالرمز [M].

ومن الجدير بالذكر أن معظم الكميات الفيزيائية يمكن التعبير عنها بدلالة الأبعاد الأساسية كالطول [L] والزمن [T] والكتلة [M].

أمثلة محلولة

مثال ١ : إذا علمت أن ارتفاع أعلى شلال مائي في العالم $979m$، فما مقدار هذا الارتفاع بالأقدام؟

الحل: **محاكاة**

$$h = 979m = 979\cancel{m}\left(\frac{3.281ft}{1\cancel{m}}\right) = 3212ft$$

شكل (٢ – ١) شلال ماء

مثال٢: إذا علمت أن طائرة الخطوط الجوية السعودية تطير على ارتفاع $32810ft$، فما مقدار هذا الارتفاع بالأمتار؟

الحل: **محاكاة**

شكل (٣ – ١) طائرة ترتفع في الجو

$$h = 32810ft = 32810\cancel{ft}\left(\frac{1m}{3.281\cancel{ft}}\right) = 10000m$$

مثال٣: إذا كانت السرعة القصوى v المسموح بها على خط سريع هي $65\,mi/h$ فما مقدار هذه السرعة بـ km/h علماً بأن $1mile = 1.609km$؟

الحل: **محاكاة**

$$v = 65\frac{mi}{h} = 65\frac{\cancel{mi}}{h}\left(\frac{1.609km}{\cancel{mi}}\right) = 104.6\frac{km}{h}$$

ويمكن فقط جمع (طرح) الكميات الفيزيائية التي لها نفس الوحدات، وتكمن هنا أهمية كتابة (ذكر) الوحدات كونها تخدم بشكل تلقائي كمذكر للتحويل وجعل جميع القراءات ذات وحدات متناسقة (متماثلة).

مثال٤: تحرك شخص من نقطة تبعد $100m$ عن نقطة الأصل على محور السينات وقطع مسافة $0.5km$. ما هو بعد الشخص عن نقطة الأصل؟

الحل:

$$x = 100m + 0.5km$$

$$x = 100m + 0.5\cancel{km}\left(\frac{1000m}{1\cancel{km}}\right)$$

$$x = 100m + 500m = 600m$$

مثال ٥ : ما هي أبعاد السرعة ؟

الحل:

تعريف السرعة V:

$$\text{السرعة} = \frac{\text{الإزاحة}}{\text{الزمن}}$$

فتكون وحدات قياسها

$$\frac{m}{\sec}$$

وأبعادها:

$$\frac{[L]}{[T]}$$

مثال ٦: ما هي أبعاد التسارع (العجلة)؟

الحل:

تعريف التسارع a :

$$\text{التسارع} = \frac{\text{السرعة}}{\text{الزمن}}$$

فتكون وحدات قياسه

$$\frac{\left(\frac{m}{\sec}\right)}{\sec} = \frac{m}{s^2}$$

وأبعاده:

$$\frac{[L]}{[T]^2}$$

مثال٧: ما هي أبعاد الحجم V لمتوازي مستطيلات؟

الحل:

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

وعليه فإن بعد الحجم V يكون : $[V] = [L][L][L]$

$$[L]^3$$

مثال٨ : ما هي أبعاد الكثافة ρ ؟

الحل :

$$\text{الكثافة} = \frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$$

فتكون وحدات قياسها الأساسية $\frac{kg}{m^3}$

وأبعادها $\frac{[M]}{[L]^3}$

وتستخدم نظرية التحليل بالأبعاد، التي تنص على وجوب تجانس أبعاد طرفي أي معادلة، والذي يتضمن تجانس حدود المعادلة، لفحص صحة العلاقات الرياضية.

ولتوضيح ذلك دعنا نتساءل عن صحة العلاقتين التاليتين:

العلاقة الأولى $x = vt$

العلاقة الثانية $x = \frac{1}{2}vt^2$

حيث x : المسافة ، v : السرعة ، t : الزمن.

إذا كتبنا معادلة الأبعاد (المعادلة البعدية) للعلاقة الأولى نحصل على:

$$x \stackrel{?}{=} vt$$

$$[L] = \frac{[L]}{\cancel{[T]}}\cancel{[T]}$$

$$[L] = [L]$$

ونلاحظ أن الأبعاد على طرفي إشارة المساواة متجانسة وعليه فإن هذه العلاقة صحيحة بعدياً.

والآن إذا اعتبرنا العلاقة الثانية وكتبنا المعادلة البعدية لها نحصل على:

$$x \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} vt^2$$

$$[L] \stackrel{?}{=} \frac{[L]}{[T]}[T]^2$$

$$[L] \stackrel{?}{=} \frac{[L]}{\cancel{[T]}}[T]^{\cancel{2}}$$

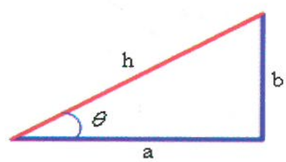
$$[L] \stackrel{?}{=} [L][T]$$

وبما أن بعد الطرف الأيسر لا يماثل بعد الطرف الأيمن (الأبعاد غير متجانسة) فإن العلاقة الثانية لا يمكن أن تكون صحيحة إطلاقاً.

وعليه إذا علمنا أن إحدى العلاقتين صحيحة فإننا نختار العلاقة الأولى. وفي غياب هذه المعرفة لا تستطيع نظرية التحليل بالأبعادَ تحديد العلاقة الصحيحة تماما وذلك لعدم مقدرتها على اعتبار العوامل العددية المجردة كالرقم $\frac{1}{2}$ في العلاقة أعلاه.

وتجدر الإشارة، وكما لاحظنا في دراسة العلاقتين، إلى أن الأبعاد تختصر كما هو حال الكميات الجبرية كما أنَ المعاملات العددية المجردة كالعدد $\frac{1}{2}$ ليس لها أبعاد ولذلك تهمل في المعادلة البعدية.

ومع أنه في أغلب العلاقات (المعادلات) الفيزيائية يكون هناك بعد للطرف الأيسر وبعد للطرف الأيمن إلا أن هناك بعض العلاقات التي لا يكون لطرفها الأيسر بعد وكذلك للطرف الأيمن ومن أمثلة ذلك الدوال المثلثية (جيب sine، جيب تمام cosine، وظل tangent) وتختصر بـ $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ على التوالي ويكون الرمز θ هو الزاوية ويلفظ ثيتا (theta)، وتعرف هذه الدوال باستخدام المثلث قائم الزاوية المبين في الشكل كما يلي:



شكل (٤-١) : مثلث قائم الزاوية

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{h}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{h}$$

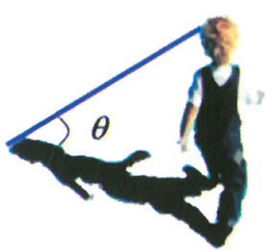
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{b}{a}$$

ويمكن التأكد بأن الطرف الأيسر لكل من الدوال الثلاث لا بعد لـه لأنـه عـدد مجرد، وكذلك الطرف الأيمن لأنه نسـبة بـين وحـدتي طـول. وهنـاك ثـلاث دوال مثلثيه أخرى ترتبط كل منها بمقلوب إحدى الدوال الثلاث السابقة وفقا لما يلي:

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \;،\quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad،\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

وتلفظ secant (قاطع)، cosecant (قاطع تمـام)، cotangent (ظـل تمـام) عـلى التوالي. ووفقا لهذه التعريفات فإن هذه العلاقات الثلاث لا أبعاد لها أيضا.

تمرين: إذا كان طول ظلك يساوي طولك (انظر الشكل)، أوجد الزاوية θ.



أسئلة وتمارين

أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

١- إذا كانت المسافة بين مدينة الطائف ومكة المكرمة $80km$ فإنها تساوي:			
أ- $128.72mile$	ب- $49.72mile$	ج- $0.080mile$	د- $80000mile$
٢- إذا كانت سرعة سيارتك $25m/s$ فإنها تعادل :			
أ- $90km/h$	ب- $1500km/h$	ج- $9.6km/h$	د- $90km/h^2$
٣- كم عبوة ذات حجم $10000cm^3$ نحتاج لملء خزان ماء سعته $1m^3$ ؟			
أ- 1	ب- 10	ج- 1000	د- 100
٤- إذا أثرت قوة F على جسم كتلته m فأكسبته تسارعا a وفق المعادلة $F=ma$ ، فإن أبعاد القوة هي:			
أ- $\frac{[L]}{[T]}$	ب- $\frac{[L]}{[T]^2}$	ج- $\frac{[M]\,[L]}{[T]^2}$	د- $\frac{[T]^2\,[L]}{[M]}$
٥- إذا كانت الكميات الفيزيائية A و B لها أبعاد مختلفة، أي العمليات الحسابية التالية ذات معنى فيزيائي ؟			
أ- $A+B$	ب- $B-A$	ج- $\frac{A}{B}-A$	د- AB

ثانيا:

١ - موقف سيارات طوله $150ft$ وعرضه $100ft$، احسب مساحته بالمتر المربع.

٢- سيارة تتحرك بسرعة $80\ km/h$، احسب سرعتها بوحدات m/s.

٣ - إذا علمت أن الزمن الدوري للبندول البسيط (T) يعطى بالعلاقة التالية:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

حيث ℓ : طول خيط البندول، g :عجلة الجاذبية.
تأكد من صحة هذه العلاقة بعدياً.

٤ –أوجد وحدات قياس الثابت k في المعادلة التالية:

$$mg = kx$$

حيث m : الكتلة المعلقة في نابض، g : عجلة الجاذبية، x : استطالة النابض.
أيضاً ما هي أبعاد الثابت k ؟

٥ –افترض أن إزاحة جسيم (s) ترتبط مع الزمن (t) بالعلاقة التالية :

$$s = ct^3$$

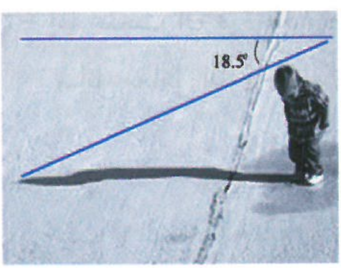
أوجد أبعاد الثابت c.

٦ - إذا كـان التسارع المركزي (a) لجسيم يتحـرك في مسـار دائـري يعتمـد عـلى سرعته المماسية (v) ونصف قطر المسار (r) وفق المعادلة التالية:

$$a = \frac{v^{n}}{r}$$

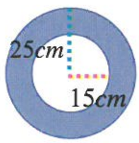
أوجد قيمة الثابت n باستخدام نظرية الأبعاد.

٧- إذا كان نهاية ظل الطفل في الشكل المجاور تبعد عن قدمه 2m، وكانت أشعة الشمس تميل عن الأفقي بزاوية 18.5° ، فما هو طول الطفل؟



أسئلة تحدي

١- كم غرام يلزم لعمل كرة مجوفة من الحديد نصف قطرها الداخلي $15cm$ ونصف قطرها الخارجي $25cm$ علماً بأن كثافة الحديد $7.86g/cm^3$ ؟



٢- إذا علمت أن $1\mu m$ يسمى ماكرون (micron) فكم ماكرون في $1cm$ ؟

٣- إذا علمت أن كثافة الماء $1g/cm^3$ وأن مضخة تضخ $4000m^3$ من الماء في زمن $5h$ ، احسب معدل ضخ الكتلة نسبة للزمن بوحدات kg/s .

٤- إذا علمت أن قوة اللزوجة F_s التي تؤثر على كرة نصف قطرها r تسقط في سائل معامل اللزوجة له η تعطى وفق العلاقة :

$$F_s = 6\pi\eta r v$$

حيث v السرعة الحدّيّة (الثابتة) للكرة. أوجد وحدة قياس معامل اللزوجة η.

٥ - في تجربة لإيجاد سرعة الصوت v في الهواء باستخدام الأعمدة الهوائية المغلقة، إذا علمت أن العلاقة بين تردد موجة الصوت في عمود الهواء f وطول عمود الهواء L هي:

$$f = \frac{1}{4} v L^n$$

وذلك بإهمال تأثير نصف قطر عمود الهواء. أوجد مقدار الثابت n باستخدام نظرية الأبعاد مع ملاحظة أن التردد يقاس بوحدة هيرتز Hertz (Hz) وأنّ $Hz = s^{-1}$.

BACK

الوحدة الثانية

المتجهات (Vectors)

المتجهات

- ما هي وحدات القياس؟
- **إذا تحركت بمقدار 4m شرقاً ثم أكملت 4m في نفس الاتجاه، وتارة أخرى تحركت بمقدار 4m شرقاً ثم 4m في الاتجاه المعاكس (الى الغرب) فما هي إزاحتك في كل مرة؟**

(٢-١) الكميات الفيزيائية

تصنف الكميات الفيزيائية إلى:

- **كميات قياسية:** (Scalars) "كميات فيزيائية تحدد بالمقدار فقط" مثل الكتلة والطول والزمن. فمثلا نقول أن طول شخص 178cm حيث ما يهم هنا هو العدد (المقدار، القيمة) فقط.

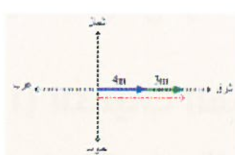
- **كميات متجهة** (Vectors) "تحدد بالمقدار والاتجاه معاً" مثل الإزاحة والسرعة والتسارع و القوة. و العدد فقط لا يعبر هنا عن الكمية الفيزيائية، فمثلا إذا أردت أن تصف منزلك لأحد زملاءك فتقول له أنه يبعد عن المدرسة 100m باتجاه الشرق، حيث العدد 100m تشير إلى المقدار فقط وكلمة الشرق تشير إلى الاتجاه.

ولكون الاتجاه له أهمية خاصة للكميات المتجه فإنه عادة تستخدم الأسهم لتمثيلها وطول السهم يعبر عن مقدار الكمية المتجهة واتجاه السهم يمثل الاتجاه. وللتسهيل تستخدم عادة الرموز للتعبير عن الكميات الفيزيائية حيث نرمز للمتجه برمز ذا لون غامق **A** أو رمز يعلوه سهم $\vec{A}$، كما ويرمز للكمية القياسية بالرمز العادي A أو الرمز العادي بخط مائل *A*.

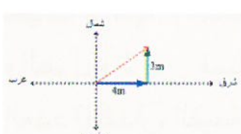
إن جمع الكميات القياسية يكون جمعاً جبرياً، بينما نأخذ المقدار والاتجاه معاً بعين الاعتبار عند جمع المتجهات. فمثلا إذا كانت كتلتك 70kg وكتلة زميلك 80kg فإن مجموع كتلتيكما يكون 150kg، وهذا يوضح عملية جمع الكميات القياسية. أما في حالة المتجهات دعنا نطرح التساؤل التالي:

تساؤل: ما هي إزاحتك الكلية في كل من الحالات التالية:

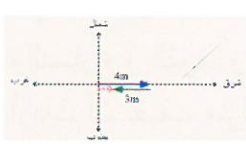
أ- إذا تحركت 4m باتجاه الشرق ثم 3m في نفس الاتجاه.



ب- إذا تحركت 4m باتجاه الشرق ثم 3m باتجاه الشمال.



ج- إذا تحركت 4m باتجاه الشرق ثم 3m في اتجاه الغرب.



شكل (١-٢): الفرق بين المسافة والإزاحة

نلاحظ أن المسافة (الطول) التي تم قطعها هي 7m في جميع الحالات بينما الإزاحة (والتي تمثل بالسهم الأحمر) تختلف من حالة لأخرى، ولإيجاد مقدار واتجاه كل من هذه الإزاحات لابد من دراسة جمع وطرح المتجهات. **محاكاة**

(٢ – ٢) جمع وطرح المتجهات

جمع متجهات على استقامة واحدة :

إن أبسط وضع لجمع المتجهات هو عندما تكون على استقامة واحدة في نفس الاتجاه، فمثلاً إذا مثلنا الإزاحة 4m باتجاه الشرق بالمتجه $\vec{A}$ والإزاحة 3m باتجاه الشرق بالمتجه $\vec{B}$ فإن هذان المتجهان يمكن جمعهما لنحصل على متجه الإزاحة الكلية $\vec{R}$ ويسمى عادة متجه المحصلة، وهو ما نحصل عليه إذا تحركنا مباشرة من نقطة الابتداء إلى نقطة الانتهاء مرة واحدة.

ويمكن ملاحظة أن ذيل المتجه الثاني موضوع على رأس المتجه الأول ورياضياً يمكن التعبير عن جمع المتجهات بما يلي:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (2-1)$$

$$\vec{R} = 4m(\text{شرق}) + 3m(\text{شرق}) = 7m(\text{شرق})$$

جمع متجهات متعامدة :

إذا مثلنا الإزاحة 4m باتجاه الشرق بالمتجه $\vec{A}$ والإزاحة 3m باتجاه الشمال بالمتجه $\vec{B}$ حيث يكون ذيل المتجه $\vec{B}$ على رأس المتجه $\vec{A}$ فإنه لا يمكن جمعهما بالطريقة السابقة لكونهما ليسا على استقامة واحدة وبدلاً من ذلك نستفيد من كون المثلث قائم الزاوية فنستخدم نظرية فيثاغورس، فيعطى مقدار المتجه $\vec{R}$ بالعلاقة : **محاكاة**

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (2-2)$$

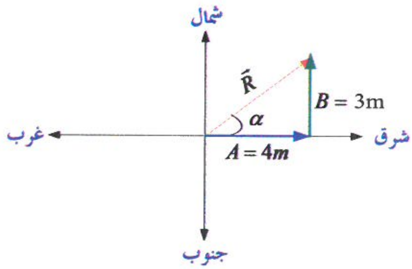
$$R = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5m$$

ولتحديد اتجاه الإزاحة المحصلة $\vec{R}$ نستخدم تعريف الجيب أو جيب التمام أو الظل :

$$\tan\alpha = \frac{B}{A} \qquad (2-3)$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\alpha = \tan^{-1}(0.7500) = 36.9^{o}$$



شكل (٢-٢) : تحديد اتجاه المحصلة

جمع المتجهات بشكل عام :

إذا مثلنا الإزاحة 4m باتجاه الشرق بالمتجه $\vec{A}$ والإزاحة 3m باتجاه يميل بزاوية $\theta = 30^{o}$ إلى الشمال من الشرق (شمال الشرق) بالمتجه $\vec{B}$ حيث يكون ذيل المتجه $\vec{B}$ على رأس المتجه $\vec{A}$، فإنه ولحساب مقدار المتجه $\vec{R}$ نستخدم قانون جيب التمام :

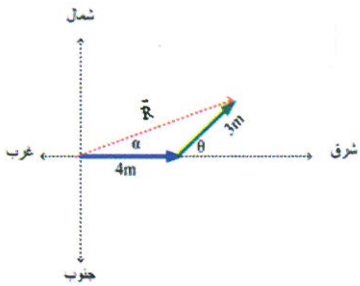
$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (2-4)$$

$$R = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + 2(4)(3)\cos 30^{o}}$$

$$R = \sqrt{16 + 9 + 24\cos 30^{o}}$$

$$R = \sqrt{25 + 24(0.866)} = 6.77m$$

ولتحديد اتجاه الإزاحة المحصلة $\vec{R}$ نستخدم العلاقة المثلثية التالية :



$$\sin\alpha = \frac{B\sin\theta}{R} \qquad (2\text{-}5)$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sin 30}{6.77} = 0.1958$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0.1958) = 11.3^{o}$$

ويمكن التعبير عن أي متجه بدلالة متجهات الوحدة العمودية $\left(\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}\right)$ والذي يمكن الرجوع إليه في الملحق (٢).

أمثلة محلولة

مثال١ : إذا تحرك شخص $50m$ إلى الغرب ثم أكمل سيره بنفس الاتجاه بمقدار $30m$، فما مقدار المسافة المقطوعة وما هي الإزاحة؟

الحل: بما أن المسافة كمية قياسية فإننا نجمع جمعاً جبرياً لإيجاد المسافة الكلية المقطوعة، وعليه فإن:

المسافة المقطوعة = $50m + 30m$

المسافة المقطوعة = $80m$

أما الإزاحة فهي كمية متجهة:

$$\vec{R} = 50m(\text{غرب}) + 30m(\text{غرب}) = 80m(\text{غرب})$$

ويمكن ملاحظة أن مقدار الإزاحة يساوي المسافة لأن المتجهين على استقامة واحدة في نفس الاتجاه في هذا المثال.

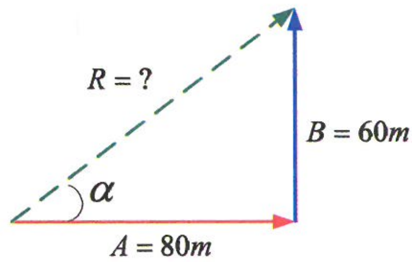
مثال٢ : احسب محصلة المتجهين في الشكل المجاور.

الحل:

تكون المحصلة:

$$\vec{R} = 80m(\text{غرب}) + 60m(\text{غرب}) = 140m(\text{غرب})$$

مثال٣: أوجد محصلة المتجهين في الشكل المجاور.



الحل: لحساب مقدار المتجه $\vec{R}$ نستخدم العلاقة:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$R = \sqrt{(80)^2 + (60)^2} = 100m$$

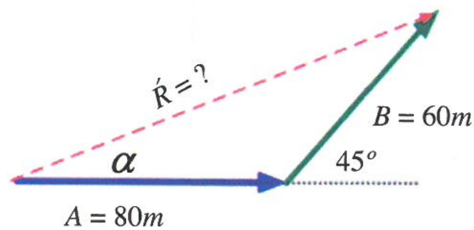
ولتحديد اتجاه الإزاحة المحصلة $\vec{R}$ نستخدم تعريف الجيب أو جيب التمام أو الظل:

$$\tan\alpha = \frac{B}{A}$$

$$\tan\alpha = \frac{60}{80} = 0.75$$

$$\alpha = \tan^{-1}(0.7500) = 36.9^o$$

مثال٤: أوجد محصلة المتجهين في الشكل المجاور.



الحل: لحساب مقدار المتجه $\vec{R}$ نستخدم العلاقة:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$R = \sqrt{(80)^2 + (60)^2 + 2(80)(60)\cos 45^o}$$

$$R = \sqrt{6400 + 3600 + 6788.2}$$

$$R = \sqrt{16788.2} = 129.6m$$

ولتحديد اتجاه الإزاحة المحصلة $\vec{R}$ نستخدم العلاقة المثلثية التالية :

$$\sin\alpha = \frac{B\sin\theta}{R}$$

$$\sin\alpha = \frac{60\sin 45}{129.6} = 0.3274$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0.3274) = 19.1^o$$

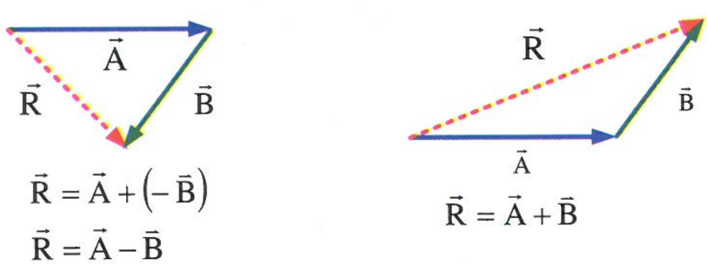
طرح المتجهات :

باختصار يمكن اعتبار عملية طرح المتجهات هي عملية جمع ولكن إحدى المتجهين يضرب بكمية قياسية (−١)، فمثلا:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-1)\vec{B} \qquad (2\text{-}6)$$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right) \qquad (2\text{-}7)$$

ويجب التنبيه الى أن $\left(-\vec{B}\right)$ هي نفسها المتجه $\left(\vec{B}\right)$ ولكن باتجاه معاكس ويؤخذ ذلك بعين الاعتبار عند تمثيل المتجهات بالرسم كما يوضح الشكل التالي :

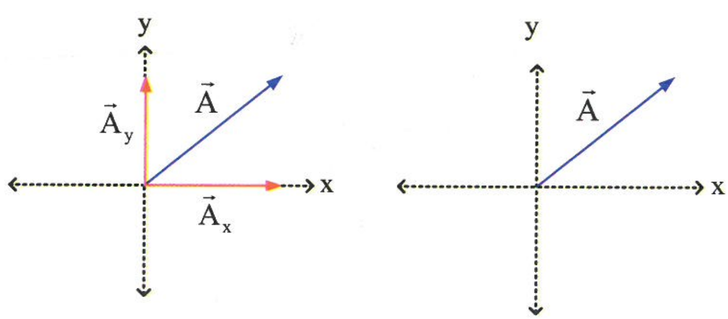


شكل (٣-٢) : جمع وطرح متجهين

طريقة المركبات :

إذا تحركت سيارة من نقطة الابتداء الى نقطة الانتهاء مباشرة وكانت الإزاحة هي المتجه $\vec{A}$ (انظر الشكل التالي) فإنه يمكن للسيارة أن تتحرك نفس الإزاحة إذا تحركت أفقياً (محور السينات بالمتجه $\vec{A}_x$) ثم عموديا (محور الصادات بالمتجه $\vec{A}_y$)، وهذا يعني أن الإزاحتين متساويتين أي أن :

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \qquad (2-8)$$



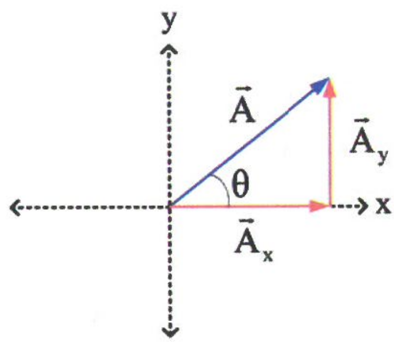
شكل (٤-٢) : تحليل متجه إلى مركبتيه

ونلاحظ من المعادلة بأن المتجه $\vec{A}$ يمثل محصلة المتجهين $\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ ، وتسمى $\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ بالمركبات الاتجاهية للمتجه $\vec{A}$ كما أن قيمها A_x و A_y تسمى مركبات المتجه $\vec{A}$ ، وتكمن أهمية استخدام مركبات المتجه بدلاً من المتجه نفسه بأنها أسهل في الحسابات.

وبشكل عام يمكن تحليل أي متجه إلى مركبتين إحداهما سينية والأخرى صادية.

فمثلا المتجه $\vec{A}$ في الشكل التالي الذي يصنع زاوية مقدارها θ مع محور السينات الموجب يمكن تحليله إلى مركبتين سينية A_x وصادية A_y.

محاكاة



شكل (٥-٢) : تحليل متجه A إلى مركبتيه

وباستخدام تعريف $\cos\theta$ ، $\sin\theta$ يكون :

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{A_x}{A} \qquad (2\text{-}9)$$

وعليه فإن:

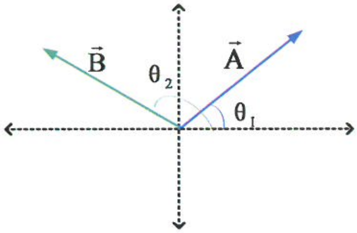
$$A_x = A\cos\theta \qquad (2\text{-}10)$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{A_y}{A} \qquad (2\text{-}11)$$

وعليه فإن :

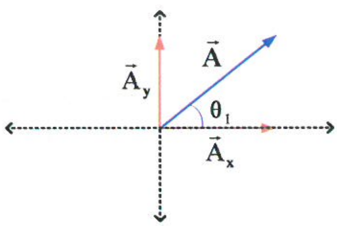
$$A_y = A\sin\theta \qquad (2\text{-}12)$$

ولحساب محصلة متجهين احدهما $\vec{A}$ يصنع زاوية مقدارها θ_1 مع محور السينات الموجب والثاني $\vec{B}$ يصنع زاوية مقدارها θ_2 مع محور السينات الموجب كما في الشكل التالي نتبع الخطوات التالية :



شكل (٦-٢) : تحليل متجهين إلى مركبتيهما

١- نحلل كل متجه إلى مركبتين سينية وصادية:

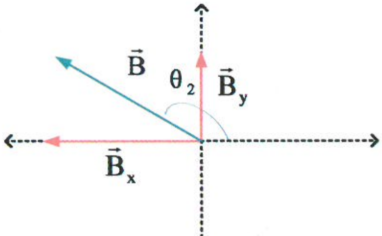


شكل (٧-٢) : تحليل المتجه A إلى مركبتيه

مركبتي المتجه $\vec{A}$ هي :

$$A_x = A\cos\theta_1$$

$$A_y = A\sin\theta_1$$



شكل (٨-٢) : تحليل المتجه B إلى مركبتيه

ومركبتي المتجه $\vec{B}$ هي :

$$B_x = B\cos\theta_2$$

$$B_y = B\sin\theta_2$$

٢ – نجمع المركبات السينية فيكون مجموعها المركبة السينية للمحصلة R_x، أي أنّ :

$$R_x = A_x + B_x \qquad (2\text{-}13)$$

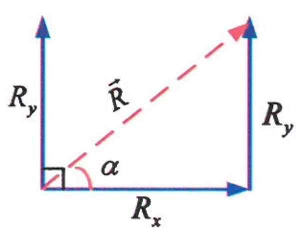
ونجمع المركبات الصادية فيكون مجموعها المركبة الصادية للمحصلة R_y، أي أنّ:

$$R_y = A_y + B_y \qquad (2\text{-}14)$$

٣ – بما أنّ مركبتي المحصلة دائماً متعامدتان، وكما هو معلوم، فإننا نحسب مقدار المحصلة $\vec{R}$ باستخدام نظرية فيثاغورس :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (2\text{-}15)$$

٤ – ولإيجاد اتجاه المحصلة (الإزاحة المحصلة $\vec{R}$) التي تصنع زاوية α مع محور السينات الموجب، فإن :



$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \qquad (2\text{-}16)$$

شكل (٩–٢) : اتجاه المحصلة للمركبتين السينية والصادية

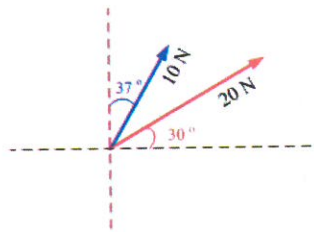
أو

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \qquad (2\text{-}17)$$

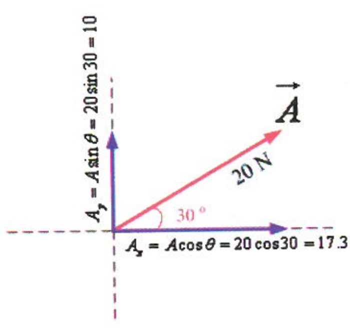
ملاحظة : ينصح دائما باستخدام طريقة تحليل المتجهات الى مركباتها لإيجاد المحصلة خصوصاً لأكثر من متجهين.

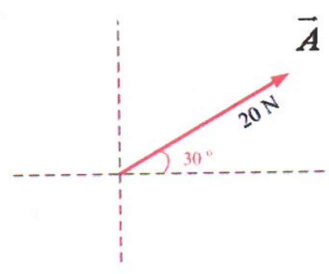
أمثلة محلولة (باستخدام طريقة المركبات)

مثال: أوجد محصلة المتجهين في الشكل التالي باستخدام طريقة المركبات.

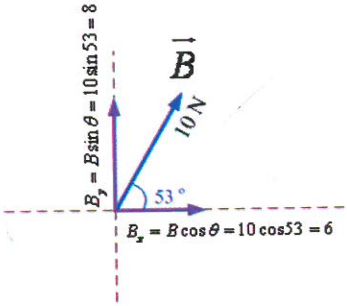


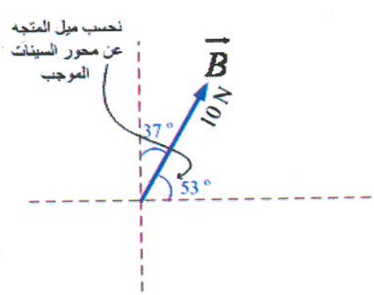
الحل: نحلل كل متجه الى مركبتين سينية وصادية ونبدأ بالمتجه $\vec{A}$:





وكذلك نحلل المتجه الآخر الى مركبتيه السينية والصادية (للتسهيل نأخذ الزاويـة بـين المتجه ومحور السينات الموجب):





أي أن :

$$\vec{B}\begin{cases} B_x = B\cos\theta = 10\cos 53 = 6N \\ B_y = B\sin\theta = 10\sin 53 = 8N \end{cases} \qquad \vec{A}\begin{cases} A_x = A\cos\theta = 20\cos 30 = 17.3N \\ A_y = A\sin\theta = 20\sin 30 = 10N \end{cases}$$

نجمع المركبات السينية فيكون مجموعها المركبة السينية للمحصلة R_x ، أي أنّ :

$$R_x = A_x + B_x = 17.3 + 6 = 23.3 \ \ N$$

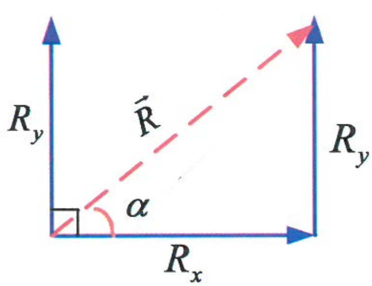
ونجمع المركبات الصادية فيكون مجموعها المركبة الصادية للمحصلة R_y ، أي أنّ:

$$R_y = A_y + B_y = 10 + 8 = 18 \ \ N$$

فيكون مقدار المحصلة النهائية R :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(23.3)^2 + (18)^2} = 29.44 \text{ N}$$

ولتحديد الاتجاه نفترض أن المحصلة تميل عن محور السينات الموجب بزاوية قدرها α ، فيكون

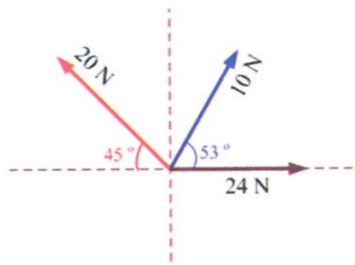


$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{18}{23.3} = 0.77$$

$$\alpha = \tan^{-1}(0.77) = 37.7^o$$

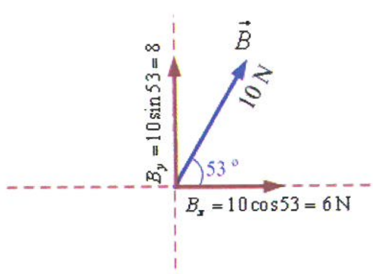
تساؤل: أوجد محصلة المتجهين في المثال السابق باستخدام قانون جيب التمام، ثم قارن النتيجتين.

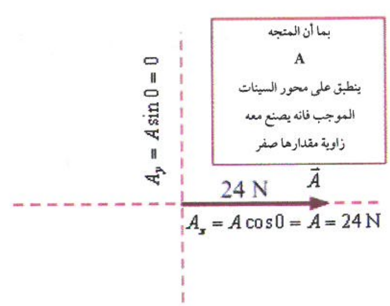
مثال – ٢: أوجد محصلة المتجهات في الشكل التالي باستخدام طريقة المركبات.

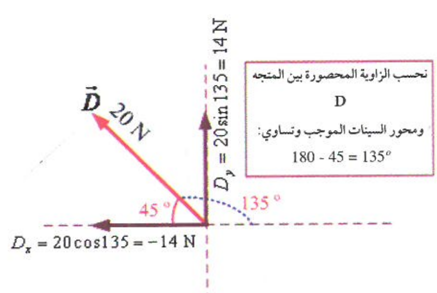


الحل:

نحلل كل متجه الى مركبتين سينية وصادية كما يلي:







أي أن :

$$\vec{B} \begin{cases} B_x = B\cos\theta = 10\cos 53 = 6N \\ B_y = B\sin\theta = 10\sin 53 = 8N \end{cases} \qquad \vec{A} \begin{cases} A_x = A\cos\theta = 24\cos 0 = 24N \\ A_y = A\sin\theta = 24\sin 0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{D} \begin{cases} D_x = D\cos\theta = 20\cos 135 = -14N \\ D_y = D\sin 135 = 20\sin 135 = 14N \end{cases}$$

نجمع المركبات السينية فيكون مجموعها المركبة السينية للمحصلة R_x، أي أنّ :

$$R_x = A_x + B_x + D_x = 24 + 6 - 14 = 16 \ N$$

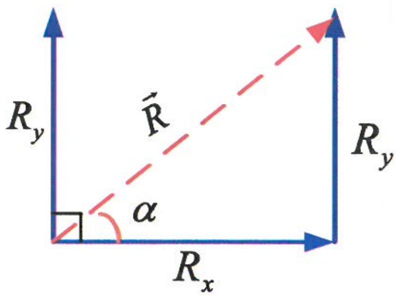
ونجمع المركبات الصادية فيكون مجموعها المركبة الصادية للمحصلة R_y، أي أنّ :

$$R_y = A_y + B_y + D_y = 0 + 8 + 14 = 22 \ N$$

فيكون مقدار المحصلة النهائية R :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(16)^2 + (22)^2} = 27.2\,\mathrm{N}$$

ولتحديد الاتجاه نفترض أن المحصلة تميل عن محور السينات الموجب بزاوية قدرها α:



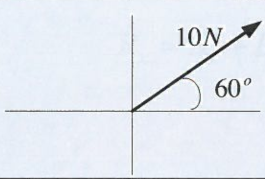
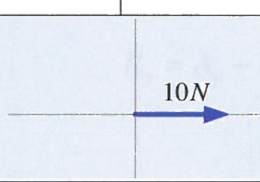
$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{22}{16} = 1.375$$

$$\alpha = \tan^{-1}(1.375) == 54^o$$

تساؤل: هل يمكن أن تكون أي من مركبات المتجه أكبر من مقدار المتجه نفسه؟

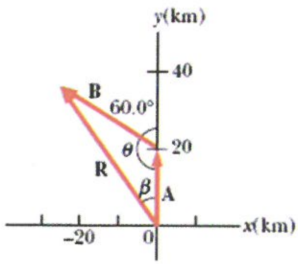
أسئلة وتمارين

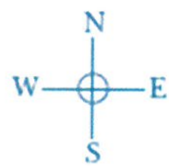
أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١- أي الكميات الفيزيائية التالية كمية متجهة؟			
أ - الطول	ب - الكتلة	ج - درجة الحرارة	د - الإزاحة
٢- أي الكميات الفيزيائية التالية كمية قياسية؟			
أ - الإزاحة	ب - السرعة	ج - المسافة	د - التسارع
٣- إذا تحركت من منزلك باتجاه الشمال $100m$ ثم تذكرت بأنك نسيت جوالك فرجعت لتأخذه من مكان انطلاقك (مغادرتك)، فإن إزاحتك الكلية بعد رجوعك تكون :			
أ - $100m$	ب - $200m$	ج - $0m$	د - $10m$
٤- المركبة الصادية للقوة الموضّحة في الشكل المجاور هي :			
أ - $5N$	ب - $8.66N$	ج - $-8.66N$	د - $-5N$
٥- المركبة الصادية للقوة الموضّحة في الشكل المجاور هي :			
أ - $0N$	ب - $10N$	ج - $-10N$	د - $7N$

ثانيا:

١- سيارة تتحرك $20km$ باتجاه الشمال ثم $35km$ باتجاه يصنع زاوية 60^o غرب الشمال كما في الشكل المبين، احسب مقدار واتجاه الإزاحة التي تحركتها السيارة.

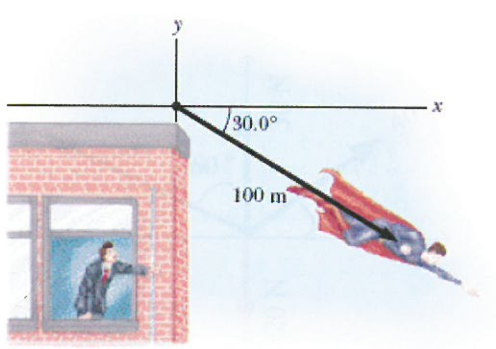




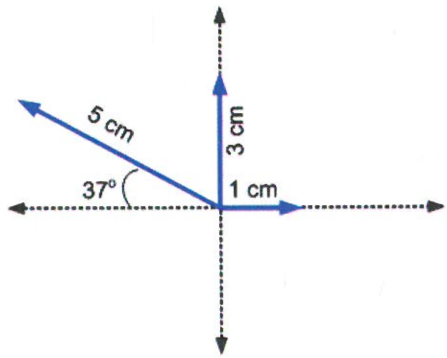
٢- متجهان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ مقداريهما $10m$ ، $4m$ على الترتيب. أوجد أكبر و أقل قيمة ممكنة للمحصلة $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$.

٣- أوجد المركبة الأفقية للإزاحة $100m$ للبطل الذي يقفز من أعلى بناية كما في الشكل المبين.

محاكاة



٤ - أوجد محصلة المتجهات في الشكل المبين أدناه باستخدام طريقة المركبات.



٥- أنت تقف على بعد $4m$ من مستودع ارتفاعه $3m$، وأردت أن تصعد لسطح المستودع باستخدام سلّم يبدأ من موقعك وينتهي بالسطح. كم يكون طول ذلك السلّم؟ **محاكاة**

أسئلة تحدي

١ – طائرة تحركت من نقطة الأصل مسافة $200km$ بزاوية 30^o شمال الشرق ثم $150km$ بزاوية 20^o غرب الشمال ثم $200km$ غربا حتى وصلت للمدينة A.
حدد موقع المدينة A نسبة لنقطة الأصل.

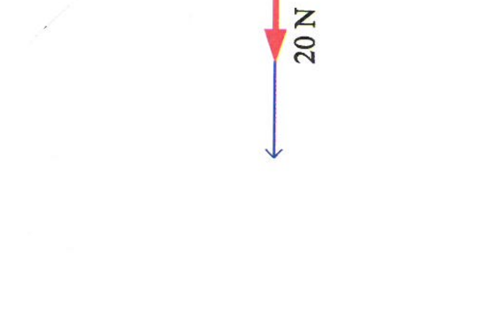
٢ – متجه $\vec{A}$ مقداره $10m$ يميل بزاوية 60^o عن محور السينات الموجب عكس عقارب الساعة ومتجه $\vec{B}$ مقداره $10m$ باتجاه محور الصادات السالب، أوجد قيمة (مقدار) :

أ – $\vec{A}+\vec{B}$

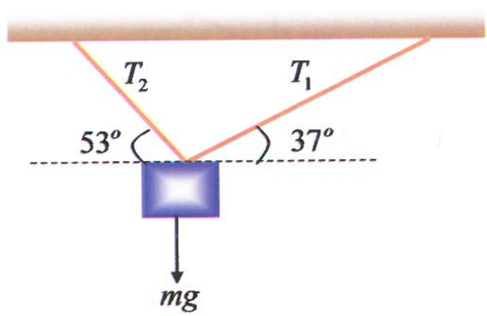
ب – $\vec{A}-\vec{B}$

٣ – طائرة تغادر المطار وفي لحظة معينة كانت على بعد $300km$ غرب الشمال، حدد كم تبعد شمالا وكم تبعد غربا عن موقع المطار.

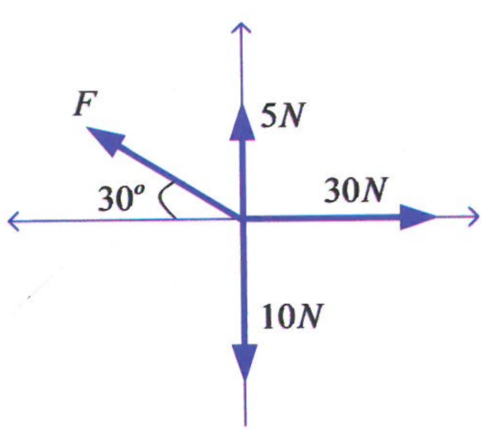
٤ – أوجد محصلة المتجهات في الشكل التالي.



٥ – جسم كتلته $2kg$ معلق في سقف غرفة بوساطة حبلين (كتلتهما مهملة) وفي وضع اتزان بحيث أن وزن الجسم يساوي محصلة الشد في الحبلين، أوجد مقدار الشد في كل منهما.



٦ – إذا كانت محصلة القوى المبينة في الشكل تساوي $21.34N$ باتجاه محور السينات الموجب، احسب مقدار القوة F



الوحدة الثالثة

وصف حركة جسيم

وصف حركة جسيم

- لماذا تفضل السفر من جدة الى الرياض بالطائرة بدلا من الباص؟
- سيارة قطعت مسافة قدرها 500m في زمن قدره 30s وأخرى قطعت نفس المسافة في زمن قدره 60 s، أيهما أسرع ؟
- تغيرت سرعة سيارة من 10m/s الى 20m/s خلال زمن قدره 5s، ما هو تسارع السيارة ؟

(٣-١) حركة جسيم في بعد واحد

باستخدام مفهوم الإزاحة سنقوم بتعريف السرعة والتسارع وسنواصل دراسة حركة جسيم بتسارع ثابت وسنركز في هذه الدراسة على الحركة الانتقالية فقط دونما اعتبار للحركات الأخرى كالحركة الدورانية أو الاهتزازية أو غيرها.

شكل (١-٣): سيارة تتحرك في خط مستقيم

السرعة المتوسطة:

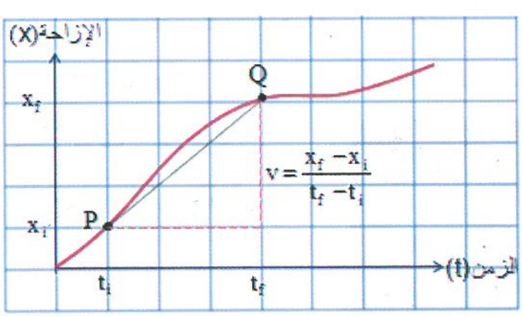
تعرف حركة جسيم تماماً إذا كان موقعه معلوماً عند أي لحظة زمنية حيث يمكن بذلك رسم موقع الجسيم مع الزمن، وللتسهيل دعنا نأخذ أولاً جسيم يتحرك على محور السينات من النقطة P الى نقطة Q وبفرض أن موقعه x_i عند النقطة P في اللحظة t_i وأصبح موقعه x_f عند النقطة Q في اللحظة t_f.

في الفترة الزمنية $\Delta t = t_f - t_i$ تكون إزاحة الجسيم $\Delta x = x_f - x_i$ وتكون السرعة المتوسطة $\bar{v}$ للجسيم، والتي تمثل المركبة السينية للسرعة المتوسطة، هي:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \qquad (3\text{-}1)$$

ويمكن ملاحظة ما يلي:

- وحدة السرعة المتوسطة هي m/s في النظام العالمي وبعدها يكون L/T.
- لا تعتمد السرعة المتوسطة على الطريق التي يسلكها الجسيم في حركته وإنما تعتمد فقط على نقطة الابتداء (البداية) ونقطة الانتهاء (النهاية).
- يمكن أن تكون السرعة المتوسطة موجبة أو سالبة وذلك حسب كون الإزاحة موجبة أو سالبة.



شكل (٢-٣): العلاقة بين الإزاحة والزمن

- تمثل السرعة المتوسطة ميل الخط الواصل هندسيا بين النقطتين P و Q عندما تكون الكمية الممثلة على المحور الصادي هي الإزاحة والكمية الممثلة على المحور السيني هي الزمن.

مثال: جسيم يتحرك على المحور السيني من النقطة $x_i = 20m$ عند $t_i = 1s$ ويصل الى النقطة $x_f = 10m$ عند $t_f = 3s$ أوجد إزاحة الجسيم والسرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية.

الحل: الإزاحة تعطى بالعلاقة:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

$$\Delta x = 10 - 20 = -10m$$

وتعطى السرعة المتوسطة بالعلاقة:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-10}{2} = -5m/s$$

السرعة اللحظية :

تعني السرعة اللحظية حساب سرعة جسيم عند لحظة معينة مقارنة مع السرعة المتوسطة التي تحسب خلال فترة زمنية، وتكمن أهمية حساب السرعة اللحظية عندما تكون السرعة المتوسطة غير ثابتة خلال فترات زمنية مختلفة.

وحيث أن السرعة اللحظية تكون عند لحظة معينة فإن ذلك يعني أن $\Delta t \to 0$ وعليه يمكن تعريف السرعة اللحظية v بأنها تساوي قيمة النهاية (lim) لحاصل النسبة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر، أي أن:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3-2)$$

وفي الترميز الرياضي فإن هذه النهاية تسمى مشتقة x بالنسبة لـ t وتكتب $\frac{dx}{dt}$ وعليه يكون:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (3-3)$$

ويمكن أن تكون السرعة اللحظية موجبة، سالبة، أو صفر. وهندسياً تكون السرعة اللحظية عند لحظة زمنية معينة هي ميل المماس المار بالنقطة عند تلك اللحظة الزمنية.

التسارع (العجلة) :

بفرض أن جسيم تحرك على المحور السيني من النقطة P بسرعة v_i عند اللحظة t_i ووصل النقطة Q بسرعة v_f عند اللحظة t_f، فإن التسارع المتوسط $\overline{a}$، والذي يعرف بأنه النسبة بين التغير في السرعة والتغير في الزمن، يكون :

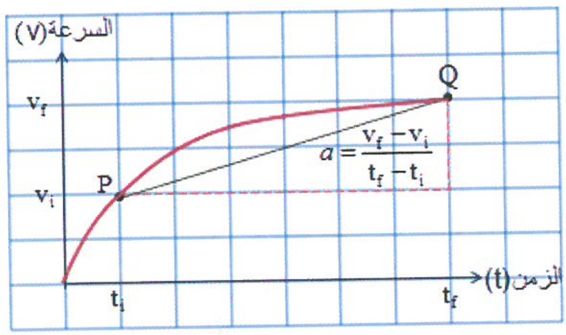
$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \qquad (3-4)$$

ويمثل ذلك المركبة السينية للتسارع المتوسط.

ويمكن ملاحظة ما يلي:

- وحدة التسارع المتوسط هي m/s^2 في النظام العالمي وبعده يكون L/T^2.
- يمكن أن يكون التسارع المتوسط موجباً أو سالبا وذلك حسب التغير في السرعة Δv.

- يمثل التسارع المتوسط ميل الخط الواصل هندسيا بين النقطتين P و Q عندما تكون الكمية الممثلة على المحور الصادي هي السرعة والكمية الممثلة على المحور السيني هي الزمن.



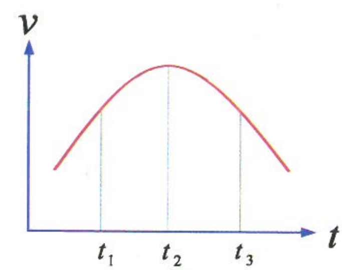
شكل (٣-٣): العلاقة بين السرعة والزمن

التسارع اللحظي:

من المفيد أحياناً تعريف التسارع اللحظي a وهو النهاية للتسارع المتوسط عندما $\Delta t \to 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (3\text{-}5)$$

ويمكن ملاحظة أن التسارع اللحظي يساوي مشتقة السرعة نسبة للزمن عند لحظة زمنية محددة. وهندسياً يكون التسارع اللحظي عند لحظة زمنية محـددة هو ميل المماس المار بالنقطـة (على منحنـى السـرعة – الزمـن) عند اللحظة الزمنية تلك. ففي الشكل المجـاور يكون التسارع اللحظي موجبا عند t_1 وصفراً عند t_2 وسالبا عند t_3.



شكل (٤-٣): منحنى السرعة – الزمن

(٣-٢) حركة جسيم في بعد واحد بتسارع ثابت (منتظم)

عندما يكون تسارع جسيم ثابت فذلك يعني أن لا فرق بين التسارع المتوسط والتسارع اللحظي، كما أن السرعة تزداد أو تتناقص بنفس المعدل خلال الحركة، ويسمى التسارع تباطؤ في حالة تناقص السرعة. والعلاقات الأربع التي تصف مثل هذه الحركة هي:

$$v = v_o + at \tag{3-6}$$

$$x - x_o = \frac{1}{2}(v_o + v)t \tag{3-7}$$

$$x - x_o = v_o t + \frac{1}{2}at^2 \tag{3-8}$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o) \tag{3-9}$$

حيث v_o : السرعة الابتدائية، v : السرعة النهائية، a: التسارع، t: الزمن، $(x - x_o)$: الإزاحة.

وبفرض أنّ الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل $(x_o = 0)$ فإنّ هذه المعادلات تصبح:

$$v = v_o + at \tag{3-10}$$

$$x = \frac{1}{2}(v_o + v)t \tag{3-11}$$

$$x = v_o t + \frac{1}{2}at^2 \tag{3-12}$$

$$v^2 = v_o^2 + 2ax \tag{3-13}$$

وتحوي هذه المعادلات الأربع على خمس متغيرات (x, a, t, v, v_o) ويجب معرفة ثلاثة منها على الأقل لإيجاد الرابع والخامس.

سؤال: استنتج هذه المعادلات (معادلات الحركة المستقيمة) الأربع.

مثال: بدأت سيارة حركتها من السكون وأصبحت سرعتها $20\,m/s$ بعد $5s$.
احسب تسارع هذه السيارة .

الحل:

باستخدام المعادلة:

$$v = v_o + at$$

$$20 = 0 + a(5)$$

$$a = \frac{20}{5} = 4\,m/s^2$$

تساؤل: احسب إزاحة السيارة في المثال السابق.

(٣ - ٣) السقوط الحر

ومن أهم الأمثلة الفيزيائية للأجسام المتحركة بتسارع منتظم هي الأجسام الساقطة سقوطاً حراً (أي الأجسام التي تتحرك تحت تأثير مجال الجاذبية الأرضية صعودا أو هبوطاً مع إهمال مقاومة الهواء) حيث يكون تسارعها مساويا عجلة الجاذبية الأرضية $g = 9.8 m/s^2$ وعليه تستخدم العلاقات السابقة في وصف الأجسام الساقطة سقوطاً حراً مع استبدال a بـ $-g$ (الإشارة السالبة لأن اتجاه g دائماً للأسفل باتجاه مركز الأرض)، واستبدال $(x - x_o)$ بـ $(y - y_o)$ كون الحركة عمودية فيكون :

$$v = v_o - gt \qquad (3\text{-}14)$$

$$y - y_o = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (3\text{-}15)$$

$$v^2 = v_o^2 - 2g\,(y - y_o) \qquad (3\text{-}16)$$

تنبيه: أيضاً الإزاحة y والسرعتين v , v_o تعطى كل منها إشارة سالبة إذا كان اتجاهها إلى أسفل وتعطى إشارة موجبة إذا كان اتجاهها إلى أعلى.

مثال: سقط من السكون جسم سقوطاً حراً من سطح عمارة فوصل الأرض بعد زمن قدره $2s$. احسب ما يلي :

١ - سرعة الجسم عند ارتطامه بالأرض. ٢ - ارتفاع سطح العمارة.

الحـل:

١-
$$v = v_o - gt$$

$$v = 0-(9.8)(2) = -19.6\,m/s$$

والإشارة السالبة تعني أن اتجاه السرعة يكون للأسفل عند ارتطام الجسم بالأرض.

٢-
$$y - y_o = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y - y_o = 0 - \frac{1}{2}(9.8)(2)^2 = -19.6\,m$$

والإشارة السالبة تعني أن إزاحة الجسم إلى الأسفل (من موقع سقوطه).

(٣ - ٤) حركة جسيم في بعدين (مستوى)

إذن في حالة حركة جسيم في بعد واحد فقد رأينا انه يمكن وصف حركة الجسيم تماما بمعرفة تغير الإحداثي مع الزمن (معرفة دالة الإحداثي بالزمن). ويمكن استكمال (تطوير) ذلك ليشمل حركة جسيم في بعدين (المستوى السيني - الصادي مثلا). حيث يستبدل كل متغير متجه، يلزم لوصف الحركة، بمركباته السينية والصادية. وفي حال كون التسارع ثابتاً بمركبتيه السينية a_x والصادية a_y، وأنّ الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل $(x_o = 0, y_o = 0)$، سيكون هناك أربع معادلات تصف حركة الجسيم في الاتجاه السيني وأربع معادلات أخرى مناظرة لها تصف حركة الجسيم في الاتجاه الصادي :

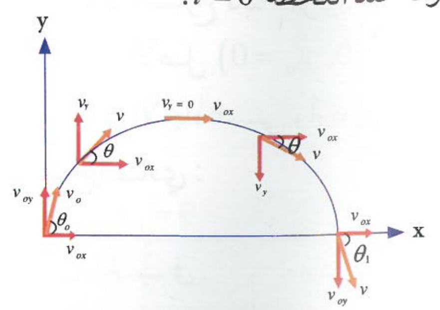
معادلات تصف حركة الجسيم فى الاتجاه الصادى	معادلات تصف حركة الجسيم فى الاتجاه السينى
$v_y = v_{oy} + a_y t \quad (3\text{-}17)$	$v_x = v_{ox} + a_x t \quad (3\text{-}21)$
$y = \frac{1}{2}(v_{oy} + v_y)t \quad (3\text{-}18)$	$x = \frac{1}{2}(v_{ox} + v_x)t \quad (3\text{-}22)$
$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (3\text{-}19)$	$x = v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (3\text{-}23)$
$v_y^2 = v_{oy}^2 + 2a_y y \quad (3\text{-}20)$	$v_x^2 = v_{ox}^2 + 2a_x x \quad (3\text{-}24)$

وتكون الحركتان في الاتجاهين السيني والصادي مستقلتين عن بعضهما وعليه يمكن التعامل مع مسألة الحركة في بعدين كمسألتين للحركة كل منهما في بعد واحد.

ومن أهم الأمثلة على الحركة في بعدين حركة المقذوفات.

حركة المقذوفات:

يمكن وصف حركة المقذوفة كحركة بسرعة ثابتة (أي بتسارع صفر) في الاتجاه الأفقي (السيني) وحركة بتسارع ثابت (أي بتسارع الجاذبية الأرضية) في الاتجاه العمودي (الصادي) ونختار الإحداثي السيني والصادي حيث تكون نقطة الأصل هي نقطة انطلاق المقذوفة عند اللحظة $t = 0$.



شكل (٥-٣): حركة المقذوفات

حسب الشكل فإنه يمكن تحليل السرعة الابتدائية للمقذوفة $\vec{v}_o$ إلى مركباتها السينية v_{ox} والصادية v_{oy} :

$$v_{ox} = v_o \cos\theta_o \qquad (3\text{-}25)$$

$$v_{oy} = v_o \sin\theta_o \qquad (3\text{-}26)$$

وحيث أن السرعة ثابتة في الاتجاه السيني لأنه لا يوجد قوى تؤثر على المقذوفة في ذلك الاتجاه (وذلك عند إهمال مقاومة الهواء) فإن مركبة السرعة الأفقية v_x عند أي زمن t تكون :

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos\theta_o \qquad (3\text{-}27)$$

وبما أن تسارع المقذوفة في الاتجاه الصادي (الاتجاه y) يساوي عجلة الجاذبية الأرضية ($-g$) بسبب تأثير قوة الجاذبية الأرضية فإنّ مركبة السرعة العمودية v_y عند أي زمن t تكون :

$$v_y = v_{oy} - gt \qquad (3-28)$$

ولكون المركبتين v_x و v_y متعامدتان عند أي لحظة زمنية t فإن قيمة السرعة للمقذوفة ، وحسب نظرية فيثاغورس، تكون :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (3-29)$$

والزاوية θ التي تصنعها المقذوفة مع الاتجاه السيني الموجب، والتي تعبر عن اتجاه السرعة للمقذوفة $\vec{v}$، تعطى بالعلاقة:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \qquad (3-30)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad (3-31)$$

وبما أن تسارع المقذوفة ثابتاً في الاتجاه السيني وأيضا ثابتاً في الاتجاه الصادي فإنه يمكن إيجاد إحداثيات المقذوفة x و y عند أي زمن t باستخدام معادلات الحركة الخطية المستقيمة :

$$x = v_{ox} t \qquad (3-32)$$

$$x = (v_o \cos\theta_o) t \qquad (3-33)$$

أيضاً

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3-34)$$

$$y = (v_o \sin\theta_o)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3-35)$$

ومن هاتين المعادلتين يمكن إيجاد y بدلالة x

$$y = (\tan\theta_o)x - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta_o}x^2 \qquad (3-36)$$

وحيث إن θ_o، g، v_o ثوابت فإن المعادلة يكون لها الصيغة :

$$y = ax - bx^2 \qquad (3-37)$$

وهي معادلة قطع ناقص (parabola) تمثل مسار المقذوفة.

ويمكن إيجاد أقصى ارتفاع تصل إليه المقذوفة حيث تكون $v_y = 0$ وذلك باستخدام:

$$v_y = v_{oy} - gt_1 \qquad (3-38)$$

حيث t_1 الزمن الذي تستغرقه المقذوفة للوصول إلى أقصى ارتفاع.

$$0 = v_o \sin\theta_o - gt_1 \qquad (3-39)$$

$$t_1 = \frac{v_o \sin\theta_o}{g} \qquad (3-40)$$

وعليه يكون أقصى ارتفاع h:

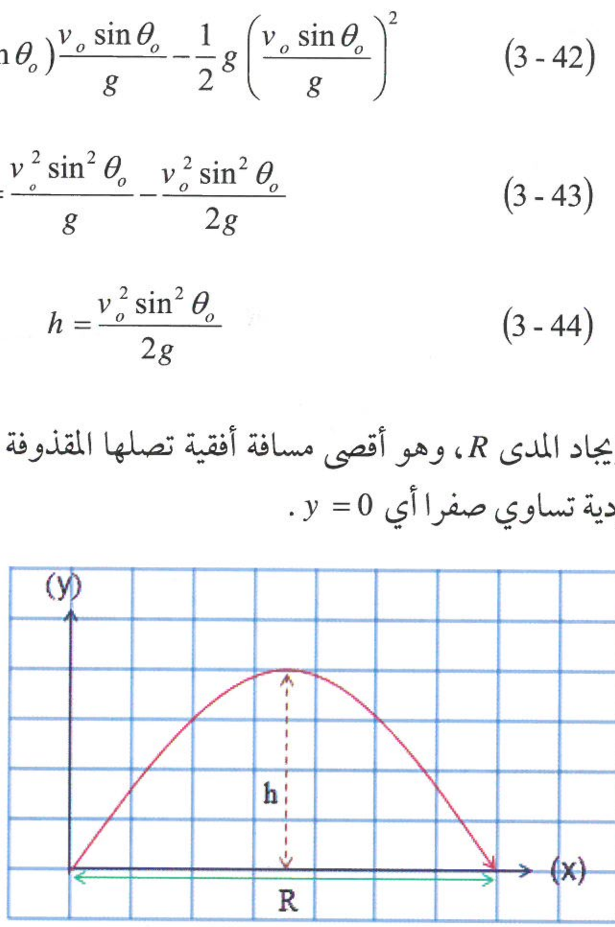
$$h = v_{oy} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \tag{3-41}$$

$$h = \left(v_o \sin\theta_o\right) \frac{v_o \sin\theta_o}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\theta_o}{g}\right)^2 \tag{3-42}$$

$$= \frac{v_o^2 \sin^2\theta_o}{g} - \frac{v_o^2 \sin^2\theta_o}{2g} \tag{3-43}$$

$$h = \frac{v_o^2 \sin^2\theta_o}{2g} \tag{3-44}$$

كما يمكن إيجاد المدى R، وهو أقصى مسافة أفقية تصلها المقذوفة عندما تكون الإزاحة العمودية تساوي صفرا أي $y = 0$.



شكل (٦-٣): يبين المدى وأقصى ارتفاع في حركة المقذوفات

وذلك باستخدام العلاقة :

$$R = v_{ox} t \qquad (3-45)$$

حيث $t = 2t_1$ وعليه فإن :

$$R = v_o \cos\theta_o \left(\frac{2v_o \sin\theta_o}{g}\right) \qquad (3-46)$$

$$R = \frac{v_o^2 2\sin\theta_o \cos\theta_o}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_o}{g} \qquad (3-47)$$

ملاحظات :

١ - إذا أطلقت قذيفة أفقيا فإن $\theta_o = 0^o$.

٢ - إذا أطلقت قذيفة راسياً الى أعلى فإن $\theta_o = 90^o$.

٣- يتحقق (نحصل على) أقصى مدى عندما $2\theta_o = 90^o$ (أي $\sin 2\theta = 1$) أو ($\theta_o = 45^o$) الدليل السفلي.

مثال١ : قذف جسم بسرعة ابتدائية قدرها $20 m/s$ تميل بزاوية قدرها 70^o عن الأفقي (محور السينات الموجب) أوجد :

أ- المدى.

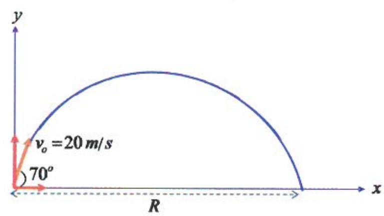
ب- الزمن الذي يقضيه الجسم في الهواء حتى يعود لنفس المستوى.

ج - أقصى ارتفاع.

الحل:

أ – المدى للمقذوفة R :

لإيجاد المدى R الذي تقطعه المقذوفة نستخدم العلاقة:



$$R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_o}{g}$$

$$R = \frac{(20)^2 \sin 2(70)}{9.8} = \frac{400 \sin 140}{9.8} = 26.2m$$

ب – الزمن المستغرق :

لإيجاد الزمن t الذي استغرقه الجسم في الهواء ، نستخدم العلاقة:

$$x = (v_o \cos\theta_o)t$$

$$R = (v_o \cos\theta_o)t$$

$$26.2 = (20 \cos 70)t$$

$$t = \frac{26.2}{6.84} = 3.8s$$

ج – أقصى ارتفاع :

لحساب أقصى ارتفاع h يصله الجسم، نستخدم العلاقة :

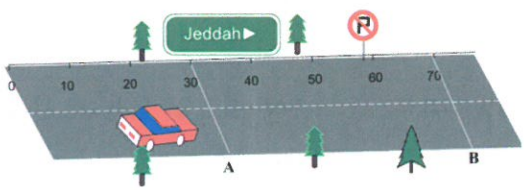
$$h = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta_o}{2g}$$

$$h = \frac{(20)^2 \sin^2 70}{2(9.8)} = 18m$$

وفي جميع حالات الحركة في بعد واحد أو بعدين، أو ثلاثة أبعاد، فان جميع الكميات الفيزيائية المتجهة يمكن كتابتها بدلالة متجهات الوحدة العمودية $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ ووصف حركتها بسهولة ويسر (انظر ملحق ٢).

أمثلة محلولة

مثال١: اعتماداً على الشكل المجاور، أوجد الإزاحة والسرعة المتوسطة المتجهة للسيارة عند انتقالها من الموضع A إلى الموضع B، علماً بأن $t_A = 0s$ ،$t_B = 4s$.



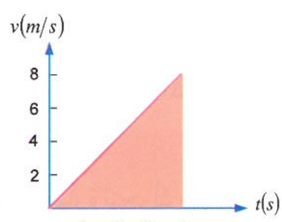
الحل:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

$$\Delta x = 70 - 30 = 40m$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{70-30}{4-0} = 10\,m/s$$

مثال٢: يمثل الشكل المجاور العلاقة بين سرعة جسم متحرك بتسارع ثابت مع الزمن، واعتماداً عليه أوجد ما يلي:



١- تسارع الجسم.

٢- المسافة التي قطعها الجسم خلال $4s$.

٣- المساحة تحت المنحنى (المساحة المظللة).ما علاقة المساحة بالإجابة في الفرع السابق؟

الحـل:

١- بما أن العلاقة ممثلة بيانيا بين السرعة والزمن فيكون تسارع الجسم ميل مماس ذلك المنحنى وهو ميل الخط المستقيم نفسه:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{(8-0)}{(4-0)} = 2m/s^2$$

٢- أما المسافة المقطوعة يمكن إيجادها باستخدام العلاقة:

$$x = v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = 0 + \frac{1}{2}(2)(4)^2 = 16m$$

٣- المساحة تحت المنحنى (المساحة المظللة) هي مساحة مثلث:

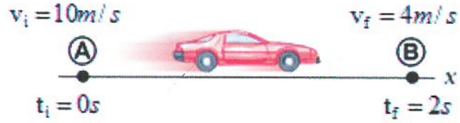
$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}(\text{القاعدة} \ x \ \text{الارتفاع})$$

$$= \frac{1}{2}(4x8) = 16m$$

والتي تساوي المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية.

مثـال٣: سيارة تتحرك بسرعة $10m/s$ ثم خفض السائق السرعة حتى أصبحت $4m/s$ بعد زمن قدره $2s$.

احسب التسارع المتوسط للسيارة.



الحـل:

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}=\frac{(4-10)}{(2-0)}=-3m/s^2$$

والإشارة السالبة تعني تباطؤ.

مثـال٤: جسم يتحرك بسـرعة ابتدائيـة قـدرها $5m/s$ وبتسـارع ثابـت قـدره $2m/s^2$.
احسب ما يلي :

١ – سرعة الجسم بعد زمن قدره $10s$. ٢ – المسافة التي قطعها الجسم خلال $10s$.

الحـل:

نستخدم معادلات الحركة الخطية لكون التسارع ثابت :

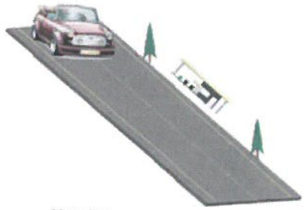
١– $v=v_o+at$

$$v=5+2(10)=25\ m/s$$

٢– $x-x_o=v_o t+\frac{1}{2}at^2$

$$x-x_o=5(10)+\frac{1}{2}(2)(10)^2=150m$$

مثال٥: سيارة تتحرك بسرعة $20\,m/s$ ثم توقفت بفعل الفرامل بعد $5s$. احسب



محاكاة

١- تباطؤ السيارة (التسارع السالب).

٢- المسافة التي قطعتها السيارة قبل أن تتوقف.

الحل:

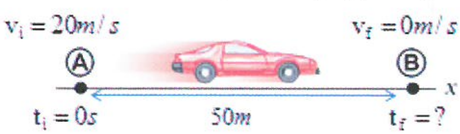
$$v = v_o + at$$

$$0 = 20 + a(5)$$

$$a = -\frac{20}{5} = -4\,m/s^2$$

$$x - x_o = 20(5) + \frac{1}{2}(-4)(5)^2 = 100 - 50 = 50m$$

مثال٦: سيارة تتحرك بسرعة $20\,m/s$ ثم توقفت بفعل الفرامل بعد أن قطعت مسافة قدرها $50m$. احسب الزمن المستغرق حتى توقفت السيارة.



الحل:

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$$

$$0 = (20)^2 + 2a(50)$$

$$0 = 400 + (100)a$$

$$a = \frac{-400}{100} = -4\,m/s^2$$

ثم نعوض في المعادلة التالية لحساب الزمن:

$$v = v_o + at$$

$$0 = 20 + (-4)t$$

$$t = \frac{20}{4} = 5s$$

مثال٧: يقف عصفور أعلى برج المملكة الذي يرتفع عن الأرض $300m$، وفجأة توفي العصفور وسقط على الأرض. احسب الزمن المستغرق حتى يصل العصفور الأرض وأيضاً سرعته قبل ارتطامه بالأرض وذلك بإهمال مقاومة الهواء.

الحل:

$$y - y_o = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

وحيث أنّ العصفور سقط من السكون $(v_o = 0)$ وإزاحته إلى أسفل $(y - y_o = -300\ m)$ فإنّ المعادلة تصبح :

$$-300 = 0 - \frac{1}{2}(9.8)t^2$$

$$300 = 4.9t^2$$

$$t^2 = \frac{300}{4.9} = 61.22 \Rightarrow \mathrm{t} = \sqrt{61.22 =} \pm 7.82s$$

$$\mathrm{t} = 7.82s$$

حيث نهمل الإشارة السالبة عند حساب الزمن t.

لإيجاد سرعته قبل ارتطامه بالأرض:

$$v = v_o - gt$$

$$v = 0 - 9.8(7.82) = -76.64\, m/s$$

والإشارة السالبة تبين أن اتجاه السرعة إلى أسفل.

مثال٨: لاعب يقفز عن الأرض بسرعة $10m/s$ وبزاوية 15^o، احسب أقصى مسافة أفقية يتحركها وأقصى ارتفاع يصل إليه.

الحل:

أقصى مسافة أفقية هي المدى R:

$$R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_o}{g}$$

$$R = \frac{(10)^2 \sin 2(15)}{9.8} = \frac{100 \sin 30}{9.8} = 5.1m$$

ولحساب أقصى ارتفاع h:

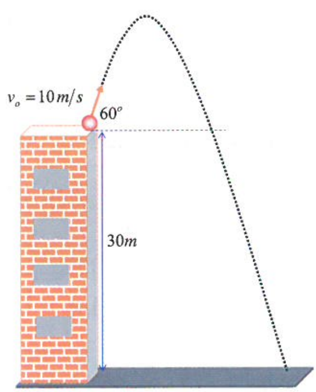
$$h = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta_o}{2g}$$

$$h = \frac{(10)^2 \sin^2 15}{2(9.8)} = 0.34m$$

مثال٩: قذف جسم بسرعة $10m/s$ وزاوية 60^o عن الأفقي من أعلى بناية ترتفع $30m$ عن سطح الأرض. احسب الزمن المستغرق حتى يصل الجسم الأرض ثم احسب بعد الجسم عن البناية أفقياً بعدما يصل الأرض.

الحل:

إذا افترضنا نقطة انطلاق الجسم هي مركز الإحداثيات السينية - الصادية (نقطة الأصل) فإنه بعدما يسقط الجسم على الأرض تكون إزاحته العمودية $y=-30m$ ، فنطبق المعادلة:



$$y=(v_o \sin\theta_o)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$-30=(10\sin 60)t-\frac{1}{2}(9.8)t^2$$

$$-30=8.66t-4.9t^2$$

$$4.9t^2-8.66t-30=0$$

ولإيجاد جذري المعادلة نستخدم طريقة المميز:

$$t=\frac{-(-8.66)\pm\sqrt{(-8.66)^2-4(4.9)(-30)}}{2(4.9)}$$

فتكون $t=3.51s,\quad -1.74s$

وبإهمال الإجابة السالبة فإن $t=3.51s$

الإزاحة الأفقية:

$$x=(v_o\cos\theta_o)t=(10\cos 60)(3.51)=53.51m$$

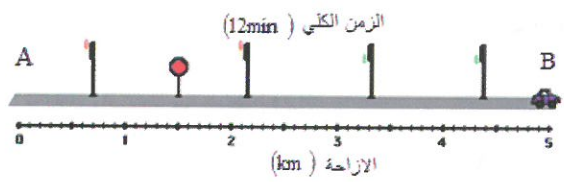
أسئلة وتمارين

أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

١ – تحرك جسم بسرعة ابتدائية $5m/s$ وأصبحت سرعته $25m/s$ خلال زمن قدره $4s$ فإن تسارعه المتوسط:			
أ – $4m/s^2$	ب – $5m/s^2$	ج – $7.5m/s^2$	د – $25m/s^2$
٢ – نمر بدأ الحركة من السكون بتسارع قدره $10m/s^2$ فوصل أقصى سرعة له بعد زمن قدره $2s$، فإن أقصى سرعة له تساوي :			
أ – $25m/s$	ب – $0.2m/s$	ج – $20m/s$	د – $5m/s$
٣ – إن المسافة التي قطعها النمر في السؤال السابق حتى وصل لأقصى سرعة له تساوي :			
أ – $20m$	ب – $40m$	ج – $0m$	د – $5m$
٤ – سيارة تتحرك بسرعة ثابتة قدرها $80km/h$ فإن تسارعها يساوي:			
أ – $9.8m/s^2$	ب – $22.2m/s^2$	ج – $0km/h^2$	د – $40km/h^2$
٥ – سقطت قطعة طوب من رافعة تعمل في مشروع بناء فوصلت الأرض بعد زمن قدره $5s$ فإن ارتفاع الرافعة :			
أ – $24.5m$	ب – $122.5m$	ج – $245m$	د – $49m$

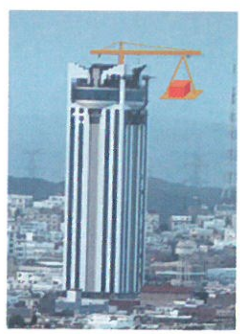
ثانيا :

١ - تحركت سيارة من الموضع A إلى الموضع B كما في الشكل المجاور.
احسب السرعة المتوسطة.



٢ - سيارة تحركت من السكون فوصلت إلى سرعة $80\,m/s$ في زمن $10s$، أوجد تسارعها.

٣- سقطت قطعة طوب من رافعة تعمل في مشروع برج قلب الطائف سقوطاً حراً حيث وصلت الأرض بعد زمن قدره $4.5s$، أوجد:



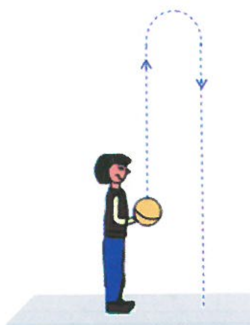
أ – ارتفاع الرافعة عن سطح الأرض.

ب – سرعة قطعة الطوب عند ارتطامها بالأرض.

محاكاة

٤ – يقذف احمد كرة رأسيا للأعلى فتصل أقصى ارتفاع بعد $1s$ من لحظة قذفها.

أوجد :



أ– أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة من نقطة قذفها.

ب – سرعة الكرة بعد ثانيتين من انطلاقها.

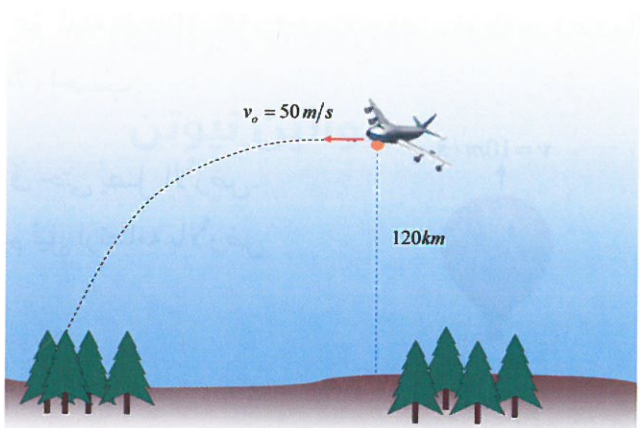
٥ – أفلت حجر من السكون من سطح برج ارتفاعه $50m$ ثم قذفت للأسفل حجر أخرى بسرعة ابتدائية v' بعد $1s$ فلحقت بالحجر الأولى قبل ارتطامها بالأرض مباشرة. أوجد السرعة الابتدائية للحجر الثانية.

أسئلة تحدي

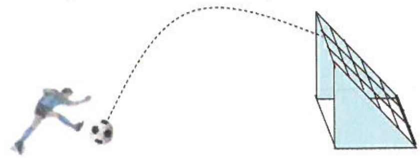
١ – سيارة بدأت الحركة من السكون فأصبحت سرعتها $80km/h$ بعد دقيقتين من حركتها ثم استمرت تتحرك بنفس السرعة لمدة $10\,min$ وبعدها بدأت بالتباطؤ فتوقفت بعد زمن قدره $5\,min$. احسب المسافة الكلية المقطوعة والسرعة المتوسطة للسيارة (اعتبر $g = 9.8m/s^2$).

٢ – مزارع يستخدم فأساً ليحفر في تربة حديقة منزلية فإذا لامست الفأس الأرض رأسياً بسرعة $8m/s$ واستقرت الفأس بالتربة بعمق $30cm$، أوجد تباطؤ الفأس خلال غرزها في التربة.

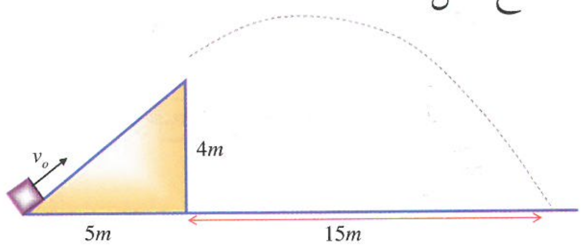
٣ – طائرة تتحرك أفقياً بسرعة $50m/s$ وعلى ارتفاع $120km$ تسقط إمدادات لمنطقة منكوبة. حدد موقع سقوط هذه الامدادت نسبة للنقطة التي سقطت منها .



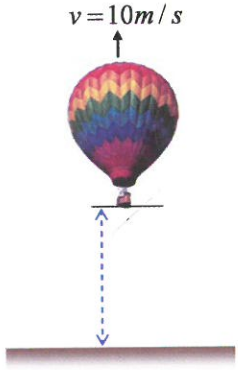
٤ - يركل لاعب كرة قدم بسرعة ابتدائية v_o بزاوية 53^o عن الأفقي من مسافة قدرها $36m$ عن المرمى فترتطم الكرة بالعارضة العلوية للمرمى والتي ترتفع $3m$ عن الأرض. احسب السرعة الابتدائية للكرة.



٥ - يتحرك جسم على سطح مائل عديم الاحتكاك بسرعة ابتدائية v_o كما في الشكل ويصل الأرض على بعد $20m$ من نقطة الانطلاق. أوجد سرعة الجسم لحظة تركه السطح المائل.

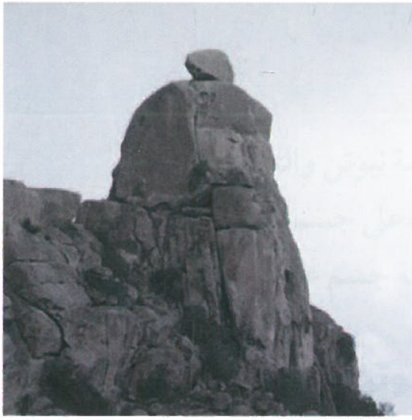


٦ - منطاد يصعد بسرعة ثابتة $10m/s$. إذا سقط منه جسم سقوطا حرا عندما كان على ارتفاع $74.1m$، احسب:



أ- الزمن المستغرق حتى يصل الأرض.

ب- سرعة الجسم قبل ارتطامه بالأرض



الوحدة الرابعة

قوانين نيوتن

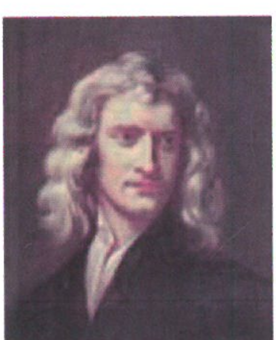
قوانين نيوتن

- ماذا تعرف عن قصة نيوتن والتفاحة؟
- ما هي القوة المؤثرة على جسم يسقط سقوطا حرا؟
- ما الذي يمانع حركة جسم عند دفعه للإمام؟

(٤-١) قوانين نيوتن

هناك ثلاثة قوانين فيزيائية مشهورة للعالم نيوتن.

قانون نيوتن الأول :



العالم اسحق نيوتن

الجسم الساكن يبقى ساكناً والمتحرك بسرعة منتظمة يستمر بسرعته ما لم تؤثر عليه قوة خارجية. ويعرف هذا القانون أيضاً بـ "قانون القصور".

ويعرّف القصور بأنه الميل الطبيعي للجسم كي يبقى في حالة سكونه أو حالة حركته بسرعة ثابتة في خط مستقيم، والكتلة (كتلة الجسم) هي قياس كمي

للقصور فمثلا يصعب تحريك جسم ساكن كتلته كبيرة كما يصعب إيقاف كتلة كبيرة تتحرك بسرعة ثابتة.

ونظام الإحداثيات الذي ينطبق به قانون نيوتن الأول يسمى النظام المرجعي القصوري (أو النظام القصوري).

قانون نيوتن الثاني :

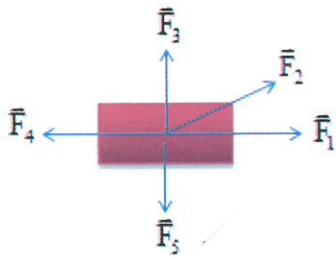
محصلة القوى الخارجية $\sum \vec{F}$ المؤثرة على جسم كتلته m تكسبه تسارعا $\vec{a}$ يتناسب طرديا مع $\sum \vec{F}$ وعكسيا مع m ويكون اتجاه $\vec{a}$ هو نفس اتجاه محصلة القوى الخارجية المؤثرة، أي أن :

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \qquad (4-1)$$

أو

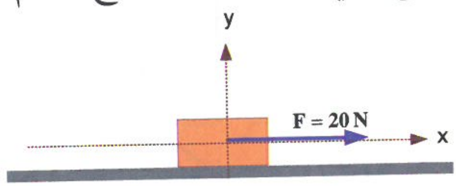
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad (4-2)$$

ووفقا لهذا القانون (قانون نيوتن الثاني) تكون وحدة القوة بالنظام العالمي $kg\frac{m}{s^2}$ والتي تسمى نيوتن نسبة للعالم نيوتن ويرمز لها بالرمز N، ويكون بعد القوة هو $\frac{ML}{T^2}$ كما أن وحدة القوة في النظام الفرنسي هي $g\frac{cm}{s^2}$ وتسمى داين $dyne$ ويمكن إثبات أن $1N = 10^5 dyne$. ولتسهيل تطبيق قانون نيوتن الثاني يستخدم عادة مخطط الجسم الحر وهو الذي يمثل الجسم والقوى المؤثرة عليه مباشرة كما في الشكل (١-٤).



شكل (١-٤): مخطط الجسم الحر

مثـال: في الشكل المجاور أثرت قوة مقدارها $20N$ على جسم كتلته $10kg$ موضوع على سطح أفقي أملس. أوجد تسارع الجسم.



الحـل:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$20 = 10a$$

$$a = \frac{20}{10} = 2\,m/s^2$$

لاحظ أن القوة المؤثرة باتجاه x وعليه فإن التسارع a يكون باتجاه x أيضاً.

الطبيعة المتجهة لقانون نيوتن الثاني:

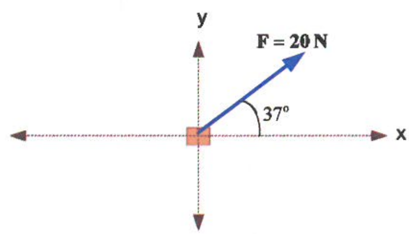
محصلة القوى الخارجية المؤثرة في قانون نيوتن الثاني $\sum \vec{F}$ لها مركبة سينية $\sum F_x$ وأخرى صادية $\sum F_y$ وكذلك التسارع $\vec{a}$ له مركبة سينية a_x وصادية a_y وعليه، وبصيغة المركبات، يمكن كتابة قانون نيوتن الثاني على النحو التالي :

$$\sum F_x = ma_x \qquad (4-3)$$

$$\sum F_y = ma_y \qquad (4-4)$$

ويمكن أن تكون هذه المركبات أعداداً سالبة أو موجبة.

مثال: في الشكل المجاور أثرت قوة مقدارها $20N$ على جسم كتلته $1kg$ كما في الشكل. أوجد المركبة السينية والمركبة الصادية لتسارع الجسم.



الحل: **محاكاة**

نقوم أولاً بتحليل القوة إلى مركبتيها السينية والصادية ثم نستخدم قانون نيوتن الثاني بصيغة المركبات :

$$\sum F_x = ma_x$$

$$20\cos 37 = 1a_x$$

$$a_x = 16 m/s^2$$

وبالمثل

$$\sum F_y = ma_y$$

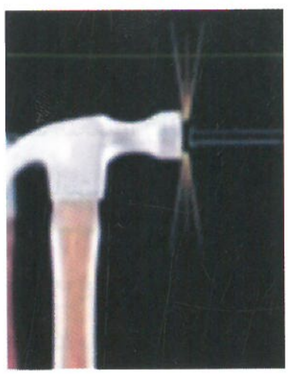
أو

$$20\sin 37 = 1a_y$$

$$a_y = 12 m/s^2$$

قانون نيوتن الثالث :

عندما يؤثر جسم على آخر (ثاني) بقوة فإن الجسم الثاني يؤثر على الأول بقوة معاكسة لها نفس القيمة ويسمى هذا القانون قانون الفعل- رد الفعل والذي ينص أيضا على انه" لكل فعل (قوة) رد فعل مساو له في المقدار ومضاد له في الاتجاه" فمثلا وكما يوضح الشكل المجاور فإنه إذا أثرت مطرقة على مسمار بقوة $\vec{F}$ فإن المسمار يؤثر على المطرقة بقوة $-\vec{F}$.



شكل (٢-٤): الفعل ورد الفعل بين مطرقة ومسمار

(٤ -٢) أنواع القوى

لقد بينت قوانين نيوتن أن القوى تلعب دورا رئيسياً في تعيين حركة جسم، وهناك قوى شائعة في الميكانيكا مثل قوة الجذب العام، القوة العمودية (قوة رد فعل سطح)، قوى الاحتكاك، وقوة الشد.

قوة الجذب العام :

إذا كان هناك كتلتان m_1 و m_2 وتفصلهما مسافة r فإن كلا منهما تنجذب نحو الأخرى بقوة مقدارها F :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (4\text{-}5)$$

حيث الثابت G يسمى ثابت الجذب العام أو ثابت نيوتن للجاذبية ($G = 6.67x10^{-11}\ N.m^2/kg^2$) .

ولكون الثابت G صغير جداً فإن F عادة ما تكون صغيرة بين الأجسام الصغيرة أما بين الكواكب فهي قوة كبيرة.

الوزن:

وزن الجسم على سطح الأرض W $(W = mg)$ يساوي قوة الجذب التي تؤثر بها الأرض على الجسم F :

$$W = G\frac{M_E m}{r_E^2} \qquad (4\text{-}6)$$

$$mg = G\frac{M_E m}{r_E^2} \qquad (4\text{-}7)$$

$$g = G\frac{M_E}{r_E^2} \qquad (4\text{-}8)$$

حيث M_E : كتلة الأرض $(M_E = 5.98x10^{24} kg)$، r_E : نصف قطر الأرض $(r_E = 6.38x10^6 m)$.

وعليه فإن :

$$g = 6.67x10^{-11} \frac{(5.98x10^{24})}{(6.38x10^6)^2}$$
$$= 9.8 m/s^2$$

ولا بد من ملاحظة ما يلي :

- $g = 9.8 m/s^2$ عندما $r = r_E$ وتقل كلما ارتفعنا عن سطح الأرض.

- الكتلة والوزن ليسا نفس الكمية الفيزيائية فالكتلة كمية قياسية في حين أن الوزن كمية متجهة كما أن الكتلة لا تتغير بتغير موقع الجسم بينما يتغير وزن الجسم بارتفاعه عن سطح الأرض. ويمكن كتابة العلاقة بين الوزن W والكتلة m :

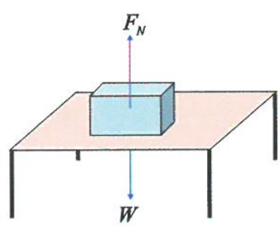
$$W = mg \qquad (4\text{-}9)$$

- لإيجاد وزن رجل فضاء على القمر نستبدل كتلة الأرض بكتلة القمر ونصف قطر الأرض بنصف قطر القمر.

القوة العمودية (قوة رد فعل سطح):

القوة العمودية F_N هي مركبة القوة التي يؤثر بها السطح على الجسم الملامس له وتكون عمودية على السطح، ولهذا سميت بالقوة العمودية.

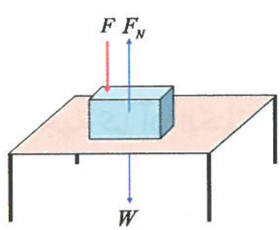
في الشكل (a) المجاور فإن الجسم يؤثر بقوة إلى أسفل على سطح الطاولة وبالتوافق مع قانون نيوتن الثالث فإن الطاولة تؤثر بقوة مضادة ومساوية على الجسم وتسمى قوة رد فعل الطاولة بالقوة العمودية.



(a)

وحسب قانون نيوتن الثاني :

$$\sum F_y = ma_y \qquad (4\text{-}10)$$



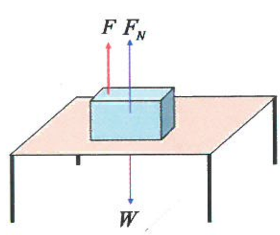
(b)

ويجدر التنبيه هنا إلى أن $a_y = 0$ كون الجسم متزناً (لا يتحرك في الاتجاه العمودي على السطح)، وعليه فإنّ :

$$F_N - W = m(0) \qquad (4\text{-}11)$$

أي أن :

$$F_N = W \qquad (4\text{-}12)$$



(c)

شكل (٣– ٤): قوة رد الفعل لسطح

محاكاة

أما في الشكل (b) أعلاه فهناك قوة خارجية F تؤثر بشكل عمودي إلى أسفل على الجسم وعليه، وباستخدام قانون نيوتن الثاني، يكون :

$$\sum F_y = ma_y \qquad (4\text{-}13)$$

$$F_N - (W + F) = m(0) \qquad (4\text{-}14)$$

أو

$$F_N = W + F \qquad (4\text{-}15)$$

أي أن القوة العمودية أكبر من الوزن.

وفي الشكل (c) فإن القوة الخارجية F تؤثر على الجسم بشكل عمودي إلى أعلى وعليه وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$F_N = W - F \qquad (4\text{-}16)$$

أي أن القوة العمودية أقل من الوزن.

قوى الاحتكاك :

عندما يتحرك (يحاول أن يتحرك) جسم على سطح فإن هناك مركبة للقوة موازية للسطح ومعاكسة لاتجاه الحركة تعيق الحركة وتسمى مركبة القوة هذه احتكاك. وهناك نوعان من قوى الاحتكاك :

قوة الاحتكاك السكوني (الساكني، الاستاتيكي) :

إذا حاولنا تحريك جسم ساكن على سطح أفقي بالتأثير بقوة أفقية F فإن الجسم قد لا يتحرك وبزيادة القوة تدريجيا قد يبقى الجسم ساكنا (لا يتحرك) وعند التأثير بقوة معينة نلاحظ أن الجسم أصبح على وشك الحركة وفي هذه اللحظة تكون القوة التي أثرنا بها مساوية للقيمة العظمى لقوة الاحتكاك السكوني f_s ، أي أن :

$$F = f_{s,\max} \qquad (4-17)$$

وقد وجد عملياً أن قيمة f_s تتناسب طردياً مع قيمة القوة العمودية (رد فعل السطح) F_N ويعبر عن ذلك رياضياً :

$$f_{s,\max} \alpha F_N \qquad (4-18)$$

أو

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N \qquad (4-19)$$

محاكاة

حيث ثابت التناسب μ_s يسمى معامل الاحتكاك السكوني.

ويجدر التنبيه الى ما يلي :

- μ_s ليس لها وحدات وبالتالي ليس لها أبعاد حيث تمثل النسبة بين قوتين.
- μ_s لا تعتمد على مساحة التلامس بين السطحين.
- μ_s تعتمد على نوع المواد للأسطح وطبيعة الأسطح ودرجة حرارتها.
- القيمة النموذجية لمعامل الاحتكاك السكوني تتراوح بين صفر و واحد $(0 \prec \mu_s \prec 1)$

قوة الاحتكاك الحركي :

عندما يكون هناك حركة (انزلاق) لجسم على آخر فلن يكون هناك أهمية لقوة الاحتكاك السكوني على الإطلاق وبدلاً من ذلك ننتقل إلى قوة احتكاك جديدة وهي قوة الاحتكاك الحركي والتي يكون أيضا اتجاهها بعكس اتجاه الحركة، وكسابقتها فإن :

$$f_k = \mu_k F_N \qquad (4-20)$$

حيث μ_k يسمى معامل الاحتكاك الحركي.

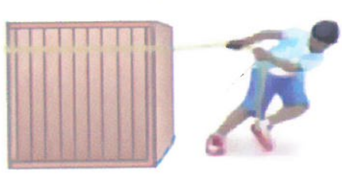
وقد وجد عملياً أن f_k :

- لا تعتمد على مساحة التلامس بين السطحين.
- لا تعتمد على سرعة الجسم المنزلق.
- تتناسب طرديا مع القوة العمودية F_N .

كما تجدر الإشارة إلى أن الثابت μ_k ليس له وحدة ويعتمد على طبيعة وظروف السطحين كما هو الحال في μ_s ، والقيمة النموذجية له أقل من قيمة μ_s $(\mu_k \prec \mu_s)$.

قوة الشد :

غالبا ما نحتاج إلى استخدام الحبال (الخيوط، الأسلاك،....الخ) في نواحي الحياة المختلفة. فإذا قمنا بسحب صندوق أفقيا باستخدام حبل فإننا نقول أن القوة التي تؤثر على الصندوق هي الشد في الحبل T ، وعادة في معالجة مثل هذه المسائل نهمل كتلة الحبل.



شكل (٤-٤): قوة الشد بواسطة حبل

الاتزان :

نقول أن جسم ما في حالة اتزان عندما يكون تسارعه صفر وعليه تكون جميع مركبات التسارع صفر.

وباستخدام صيغة المركبات لقانون نيوتن الثاني:

$$\sum F_x = ma_x \qquad (4-21)$$

$$\sum F_y = ma_y \qquad (4-22)$$

نحصل على

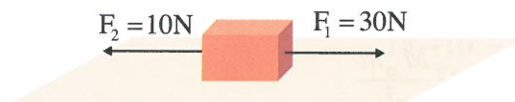
$$\sum F_x = 0 \qquad (4-23)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad (4-24)$$

وهاتين المعادلتين تعبران عن شرط الاتزان في حالة الحركة الانتقالية (في غياب الحركة الدورانية والتي سنتعرض لها لاحقا).

أمثلة محلولة

مثال١: جسم كتلته $2kg$ موضوع على سطح أفقي أملس، أثرت عليه قوتان متعاكستان كما في الشكل المجاور، أوجد تسارع الجسم.



الحل:

بما أن القوى على خط مستقيم منطبق مع محور السينات فإن :

$$\sum F_x = ma_x$$

$$F_1 - F_2 = ma_x$$

$$30 - 10 = 2a_x$$

$$a_x = 10 m/s^2$$

أي أنّ التسارع يكون باتجاه محور السينات الموجب.

مثال٢: إذا علمت أن كتلة القمر $M_m = 7.349x10^{22} kg$ ونصف قطره $r_m = 1738km$، احسب عجلة الجاذبية على سطحه.

الحل:

نفترض وجود جسم كتلته m موجود على سطح القمر الذي كتلته M_m فيكون :

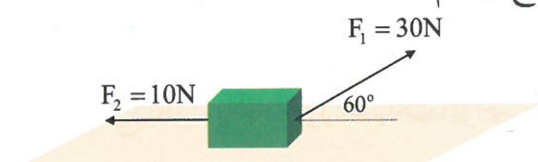
$$W = G\frac{M_m m}{r_m^2}$$

$$mg = G\frac{M_m m}{r_m^2}$$

$$g = G\frac{M_m}{r_m^2}$$

$$g = 6.67x\,10^{-11}\frac{\left(7.349x\,10^{22}\right)}{\left(1.738x\,10^{6}\right)^2} = 1.62\,m/s^2$$

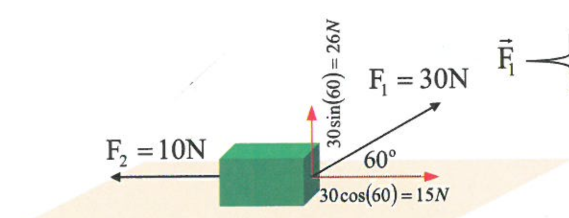
مثال٣: جسم كتلته $2kg$ موضوع على سطح أفقي أملس ، أثرت عليه قوتان كما في الشكل، أوجد تسارع الجسم.



الحل:

نحلل القوة $\vec{F}_1$ الى مركبتيها كما في الشكل المجاور :

$$\vec{F}_1 \begin{cases} F_{1x} = 30\cos 60 = 15\,N \\ F_{1y} = 30\sin 60 = 26\,N \end{cases}$$



بما أن الجسم يتحرك أفقيا إذن يكون له مركبة تسارع سينية فقط والصادية تكون صفر :

$$\sum F_x = ma_x$$

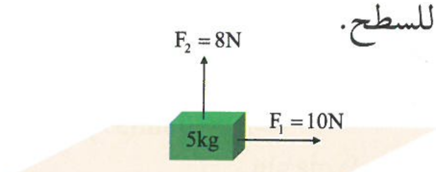
$$F_1 \cos 60 - F_2 = ma_x$$

$$15 - 10 = 2a_x$$

$$a_x = 2.5 m/s^2$$

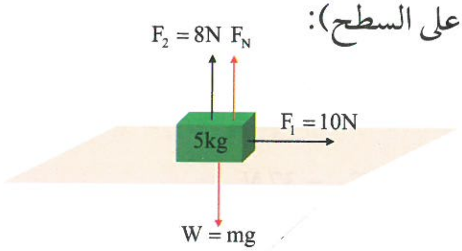
أي أنّ التسارع باتجاه محور السينات الموجب.

مثال٤: جسم كتلته $5kg$ موضوع على سطح أفقي وتؤثر عليه قوى خارجية كما في الشكل. احسب قوة رد الفعل للسطح.



الحـل:

لإيجاد قوة رد الفعل نحدد جميع القوى المؤثرة على الجسم بمركباتها الأفقية والرأسية كما في الشكل المجاور، ثم نطبق قانون نيوتن بصيغة المركبات ونأخذ الصيغة المتعلقة بالمركبة الصادية (العمودية على السطح):



$$\sum F_y = ma_y$$

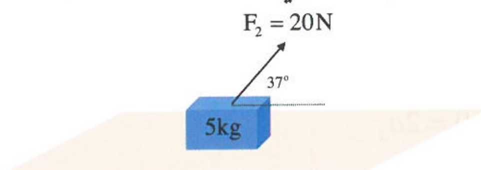
$$(F_N + 8) - W = m(0)$$

أو

$$(F_N + 8) - (5)(9.8) = m(0)$$

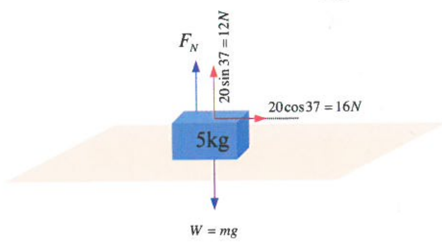
$$F_N = 41N$$

مثال ٥: جسم كتلته $5kg$ موضوع على سطح أفقي خشن وتؤثر عليه قوى خارجية كما في الشكل المجاور. احسب قوة رد الفعل للسطح، ثم احسب القيمة العظمى لقوة الاحتكاك السكوني علما بأن $\mu_s = 0.7$.



الحل:

لإيجاد قوة رد الفعل نحدد جميع القوى المؤثرة على الجسم بمركباتها الأفقية والرأسية كما في الشكل المجاور، ثم نطبق قانون نيوتن بصيغة المركبات ونأخذ الصيغة المتعلقة بالمركبة الصادية (العمودية على السطح). نحلل أولاً القوة $\vec{F}$ الى مركبتيها كما هو موضح في الشكل :



$$\vec{F}\begin{cases} F_x = 30\cos(37) = 16N \\ F_y = 30\sin(37) = 12N \end{cases}$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$(F_N + 12) - W = m(0)$$

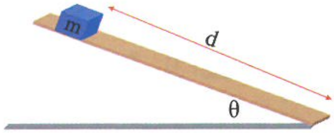
$$(F_N + 12) - (5)[9.8] = m(0)$$

$$F_N = 37N$$

وبذلك تكون القيمة العظمى لقوة الاحتكاك السكوني :

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N = 0.7x37 = 25.9N$$

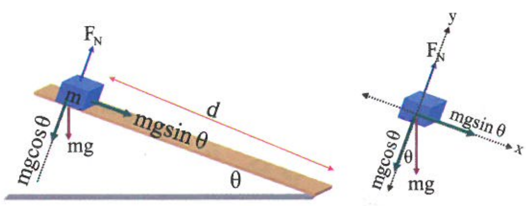
مثال ٦: ينزلق صندوق كتلته m من حالة السكون على سطح عديم الاحتكاك مائل بزاوية θ. أوجد تسارعه.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر ونحدد القوى المؤثرة عليه كما في الشكل المجاور.

نفترض أن اتجاه السطح المائل هو اتجاه محور السينات والعمودي عليه يمثل محور الصادات، وبذلك تكون القوة الموازية للسطح بالاتجاه السيني هي مركبة الوزن $mg\sin\theta$ فقط.



$$\sum F_x = ma_x$$

$$mg\sin\theta = ma_x \quad \Rightarrow \mathrm{a}_x = g\sin\theta$$

أو

$$\mathrm{a}_x = g\sin\theta$$

كما تكون القوى العمودية على السطح هي F_N باتجاه محور الصادات الموجب و مركبة الوزن $mg\cos\theta$ باتجاه محور الصادات السالب، ولكون التسارع صفر باتجاه محور الصادات لأنه لا يوجد حركة في هذا الاتجاه فإنه يمكن معرفة F_N :

$$\sum F_y = 0$$

$$\mathrm{F_N} - mg\cos\theta = 0$$

$$\mathrm{F_N} = mg\cos\theta$$

تساؤل١: إذا كانت زاوية ميل السطح $\theta = 90^o$، ماذا يكون التسارع؟

تساؤل٢: إذا تحرك الصندوق مسافة d حتى وصل نهاية السطح، اوجد الزمن اللازم لذلك.

مثال٧: جسم كتلته $20kg$ على سطح أفقي خشن. إذا علمت أننا نحتاج إلى قوة أفقية مقدارها $74N$ حتى يوشك على الحركة وبعدما يتحرك نحتاج قوة أفقية مقدارها $F = 49N$ ليستمر في الحركة بسرعة ثابتة، أوجد معاملي الاحتكاك السكوني والحركي.

الحل:

بما أن الجسم موجود على سطح أفقي والقوة الخارجية الوحيدة هي أيضا أفقية فإن القوة العمودية (رد الفعل) تساوي الوزن :

$$F_N = W = mg = 20x9.8 = 196N$$

أقصى قوة نحتاجها حتى يوشك الجسم على الحركة تساوي قوة الاحتكاك السكوني العظمى :

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N$$

$$\mu_s = \frac{f_{s,\max}}{F_N}$$

$$\mu_s = \frac{74}{196} = 0.378$$

أيضاً وبما أن الجسم يتحرك بسرعة ثابتة فإن تسارعه يساوي صفر أي أن:

$$F - f_k = m(0)$$

$$F = f_k = 49N$$

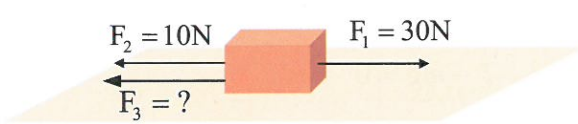
وباستخدام العلاقة: $f_k = \mu_k F_N$

$$\mu_k = \frac{f_k}{F_N}$$

نحصل على

$$\mu_k = \frac{49}{196} = 0.25$$

مثال٨: إذا كان الجسم في الشكل المجاور في حالة اتزان، احسب مقدار القوة $\vec{F}_3$.



الحل:

بما أن الجسم في حالة اتزان وجميع القوى المؤثرة في الاتجاه السيني :

$$\sum F_x = 0$$

$$30 - (10 + F_3) = 0$$

$$F_3 = 20N$$

مثال٩: الشكل المجاور يبين ثريا إضاءة كتلتها $1kg$ معلقة في سقف منزل بواسطة حبل. احسب مقدار الشد في الحبل.

الحل:

تكون القوى المؤثرة على الثريا هي الوزن للأسفل وقوة الشد في الحبل للأعلى، ولكون الثريا ساكنة فإن

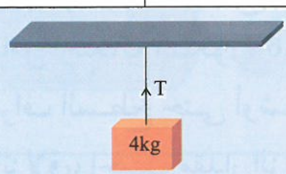
$$\sum F_y = 0$$

$$T - mg = 0$$

$$T = mg = (1)(9.8) = 9.8N$$

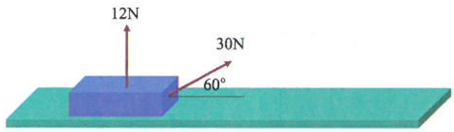
أسئلة وتمارين

أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

<table>
<tr><td colspan="4">١- جسم كتلته $6kg$ يتحرك بتسارع $2m/s^2$ فإن مقدار محصلة القوى المؤثرة عليه تساوي :</td></tr>
<tr><td>أ - $1.2N$</td><td>ب - $12N$</td><td>ج - $15000N$</td><td>د - $0.15N$</td></tr>
<tr><td colspan="4">٢- جسم وزنه على سطح الأرض $147N$ فإن كتلته تساوي :</td></tr>
<tr><td>أ - $1.5kg$</td><td>ب - $90kg$</td><td>ج - $15kg$</td><td>د - $0.65kg$</td></tr>
<tr><td colspan="4">٣- إذا كان معامل الاحتكاك السكونى μ_s ومعامل الاحتكاك الحركى μ_k لسطح خشن يتحرك عليه جسم فإن :</td></tr>
<tr><td>أ - $\mu_k \succ \mu_s$</td><td>ب - $\mu_k = \mu_s$</td><td>ج - $\mu_k = 1$</td><td>د - $\mu_k \prec \mu_s$</td></tr>
<tr><td colspan="2">٤- إذا كان جسم كتلته $4kg$ معلق بحبل كما في الشكل، فإن مقدار الشد T في الحبل يساوي :</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>أ - $5N$</td><td>ب - $8.66N$</td><td>ج - $39.2N$</td><td>د - $2.45\ N$</td></tr>
<tr><td colspan="4">٥- إذا كان جسم كتلته $2kg$ موجود على سطح أفقى خشن معامل احتكاكه السكوني 0.5 فإن أقل قوة لازمة حتى يوشك الجسم على الحركة تساوي :</td></tr>
<tr><td>أ - $9.8N$</td><td>ب - $19.6N$</td><td>ج - $39.2N$</td><td>د - $1N$</td></tr>
</table>

ثانيا :

١ – جسم كتلته $5kg$ في حالة سكون على سطح أفقي أملس. أثرت عليه قوى كما في الشكل، أوجد :



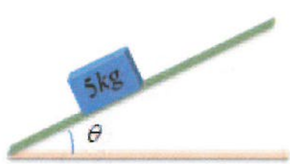
أ – تسارع الجسم.

ب – المسافة التي يقطعها بعد $4s$.

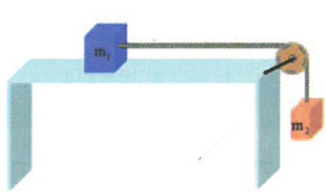
ج – تسارع الجسم إذا كان السطح خشن ومعامل الاحتكاك الحركي $\mu_k = 0.3$.

٢ – إذا علمت أن كتلة الأرض $5.98x10^{24}\,kg$ ونصف قطرها $6.38x10^{3}\,km$، احسب عجلة الجاذبية الأرضية لجسم على ارتفاع $20km$ من سطح الأرض، علماً بأنّ ثابت الجذب العام $G = 6.67x10^{-11}\ \ N.m^2/kg^2$.

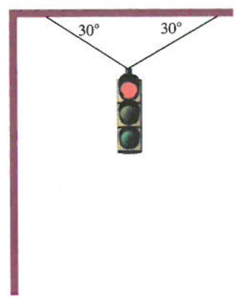
٣– جسم كتلته $5kg$ موضوع على سطح خشن معامل احتكاكه السكوني 0.6. إذا رفع احد أطراف السطح حتى أوشك الجسم على الانزلاق، احسب مقدار الزاوية θ.



٤– جسمان كتلتيهما $m_1 = 1.5kg$ و $m_2 = 1kg$ موصولتان بحبل عديم الكتلة يمر فوق بكرة عديمة الاحتكاك كما في الشكل. أوجد تسارعهما ومقدار الشد في الحبل (أهمل الاحتكاك بين m_1 والسطح).



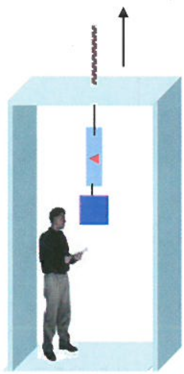
٥- إشارة ضوئية كتلتها $6kg$ معلقة بأسلاك مهملة الكتلة كما في الشكل المجاور. أوجد مقدار الشد في السلكين.



٦ – احسب اقل قوة يمكن أن يبذلها الشاب حتى يسحب خزانة كتلتها $60kg$ أفقياً على سطح خشن معامل احتكاكه السكوني $\mu_s = 0.6$.

أسئلة تحدي

١- يقوم شخص بوزن صندوق كتلته $10kg$ باستخدام ميزان زنبركي معلق رأسياً في أعلى مصعد. أوجد قراءة الميزان ألزنبركي في الحالات التالية:

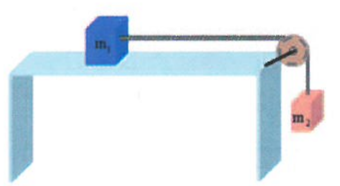


أ- إذا تحرك المصعد للأعلى بتسارع ثابت قدره $3m/s^2$.

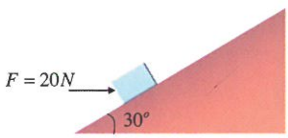
ب- إذا تحرك المصعد للأسفل بتسارع ثابت قدره $3m/s^2$.

ج- إذا تحرك المصعد بسرعة ثابتة.

٢- جسمان كتلتيهما $m_1 = 3kg$ و $m_2 = 2kg$ موصولتان بحبل عديم الكتلة يمر فوق بكرة عديمة الاحتكاك كما في الشكل. أوجد تسارعهما ومقدار الشد في الحبل إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الطاولة والجسم الأول 0.3.



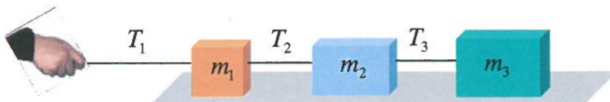
٣- أثرت قوة قدرها $20N$ أفقيا على قالب كتلته $2kg$ موضوع على سطح مائل كما في الشكل. أوجد تسارع الجسم في الحالات التالية:



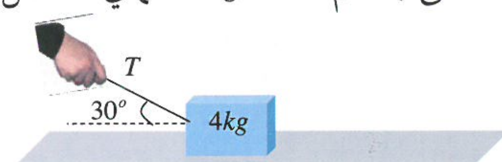
أ- إذا كان السطح المائل عديم الاحتكاك.

ب- إذا كان السطح خشن و معامل الاحتكاك الحركي 0.2

٤- أثر شخص بقوة شد $T_1 = 80N$ على ثلاثة كتل مربوطة بخيوط مهملة الكتلة تتحرك على سطح عديم الاحتكاك. إذا كانت $m_1 = 1kg$ ، $m_2 = 1.2kg$ ، $m_3 = 3kg$ ، أوجد تسارع المجموعة وقوتي الشد T_2 , T_3.



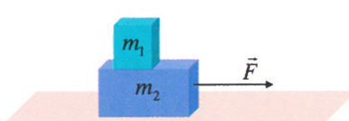
٥- أثرت قوة شد قدرها $20N$ على جسم كتلته $4kg$ كما في الشكل.
احسب تسارع الجسم:



أ- في حالة عدم وجود احتكاك بين الجسم والسطح.

ب- إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الجسم والسطح يساوي 0.25.

٦- قطعة خشبية كتلتها $m_1 = 2kg$ موضوعة على كتلة خشبية اخرى كتلتها $m_2 = 5kg$ والموجودة على سطح أفقي (انظر الشكل). معامل الاحتكاك الحركي بين m_2 والسطح الأفقي $\mu_k = 0.2$.



اثرت القوة $\vec{F}$ على الكتلة m_2.

أ- ما هي القوة التي تسبب تسارع m_1 ؟

ب- أوجد القوة الضرورية لسحب كل من الكرتين الى اليمين بتسارع $a = 3m/s^2$.

ج - أوجد اقل قيمة لمعامل الاحتكاك الاستاتيكي μ_s بين الكتلتين بحيث يمنع m_1 من الانزلاق عندما يكون تسارعهما $a = 3m/s^2$.

الوحدة الخامسة

الحركة الدائرية

الحركة الدائرية

- عند تدويرك لجسم بواسطة خيط، ما ذا يحدث للجسم لو انقطع الخيط؟
- عند تصميم الطرقات تكون المنعطفات بشكل منحدر للداخل. لماذا؟
- عندما تركب الكرسي الذي يدور رأسيا في مدينة الملاهي، ماذا تشعر عندما تكون أعلى المسار؟ وهل تشعر بفرق عند أسفل ا لمسار؟

(٥-١) الحركة الدائرية المنتظمة:

شكل (١-٥):
ألعاب ترفيهية تعتمد على الحركة الدائرية

تعرف الحركة الدائرية المنتظمة بأنها حركة جسم يسير بسرعة قيمتها ثابتة على مسار دائري.

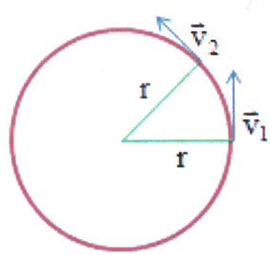
لنفترض أن طائرة تتحرك في مسار دائري نصف قطره r على ارتفاع معين من سطح الأرض بسرعة قيمتها ثابتة v. ولوصف الحركة الدائرية للطائرة مثلا فإنه من المفيد أحيانا تحديد الزمن الدوري T

للحركة بدلا من السرعة، والزمن الدوري هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة في المسار الدائري. وبناءاً على مفهومي السرعة v والزمن الدوري T فإن العلاقة التي تربطهما :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (5\text{-}1)$$

حيث $2\pi r$ هو محيط المسار الدائري أي المسافة التي يقطعها الجسم (كالطائرة مثلاً) في دورة كاملة. وإضافة إلى معرفة نصف القطر r فإنه يمكن حساب v بمعرفة T والعكس صحيح.

ومن الجدير ملاحظته أن اتجاه السرعة $\vec{v}$ في المسار الدائري يتغير باستمرار حتى مع ثبات قيمة السرعة، فتغير اتجاه السرعة هذا ينتج عنه تسارع باتجاه مركز المسار الدائري ويسمى التسارع المركزي.



شكل (٢-٥):

اتجاه السرعة لجسم يتحرك في مسار دائري

التسارع المركزي :

تعتمد قيمة التسارع المركزي a_c على قيمة سرعة الجسم v ونصف قطر المسار الدائري r وفقا للعلاقة :

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (5\text{-}2)$$

والتسارع المركزي كمية متجهة واتجاهها باتجاه مركز المسار الدائري ويتضح من هذه العلاقة أن a_c تقل بازدياد r عند ثبات v.

تساؤل : ما هي وحدات a_c بالنظام العالمي للوحدات؟ وما هو بعدها؟

مثال: سيارة تسير بسرعة ثابتة مقدارها $3m/s$ حول دوار حيث تدور منتصف الدوار في زمن قدره $30s$. احسب التسارع المركزي للسيارة.

الحل:

عندما تدور السيارة الدوار كاملاً فإن السرعة تكون $v=\frac{2\pi r}{T}$ أي طول محيط الدوار مقسوما على الزمن الدوري. وفي هذا السؤال لنفرض بشكل عام أن المسافة التي قطعها من الدوار هي s في زمن قدره t فإن السرعة :

$$v=\frac{s}{t}$$

$$s=vt=(3)(30)=90m$$

لكن s تساوي نصف محيط الدوار:

$$s=\frac{1}{2}(2\pi r)=\pi r$$

$$r=\frac{s}{\pi}=\frac{90}{\pi}=28.65m$$

فيكون التسارع المركزي :

$$a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{(3)^2}{28.65}=0.314m/s^2$$

القوة المركزية:

إذن عند وجود حركة دائرية فإن هناك تسارع مركزي حتى لو كانت السرعة ثابتة، وعليه وحسب قانون نيوتن الثاني فإنه لابد من وجود محصلة قوة باتجاه مركز الدائرة مقدارها F_c واتجاهها باتجاه المركز والتي تعرف بأنها القوة اللازمة لبقاء جسم كتلته m وسرعته v في مسار دائري نصف قطره r، ويعطى مقدار القوة المركزية بالعلاقة :

$$F_c = ma_c \qquad (5-3)$$

$$F_c = m\frac{v^2}{r} \qquad (5-4)$$

وفي حالة ثبات الكتلة m ونصف القطر r فإن F_c تتناسب طرديا مع v^2.

وفي حال تغير r فإن F_c تتناسب عكسياً مع r وهذا ما يتجلى بوضوح في شعور سائق من مواجهة لفات (التفافات) حادة عندما يكون نصف قطر المسار الدائري صغيراً ومواجهة لفات لطيفة عندما يكون نصف قطر المسار الدائري كبيراً.

مثال: إذا كانت كتلة السيارة في المثال السابق $1500kg$، احسب القوة المركزية المؤثرة على السيارة.

الحل:

$$F_c = ma_c = 1500(0.314) = 471.2N$$

وعندما تتحرك سيارة في مسار دائري على سطح أفقي وبسرعة ثابتة فإن القوة المركزية التي تحافظ على السيارة في مسارها الدائري هي قوة الاحتكاك السكوني (الاستاتيكي) بين الطريق والعجلات، وإذا كانت قوة الاحتكاك السكوني غير كافية فإن السيارة تنزلق عن الطريق.

مثال: احسب قيمة أقصى سرعة لسيارة حتى تتغلب على لفة لطريق أفقي نصف قطرها $60m$ في جو جاف (معامل الاحتكاك السكوني يساوي 0.8) وفي جو ثلجي (معامل الاحتكاك السكوني يساوي 0.1).

الحل:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$\mu_s mg = m\frac{v^2}{r}$$

أو

$$v = \sqrt{\mu_s gr}$$

في حالة الطريق الجاف :

$$v = \sqrt{(0.8)(9.8)(60)} = 21.7m/s$$

وفي حالة الطريق الثلجي :

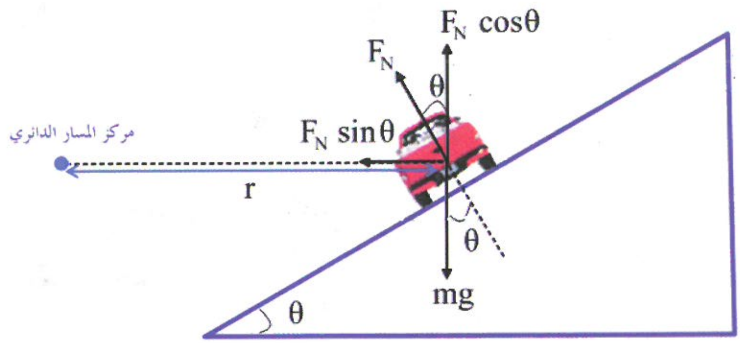
$$v = \sqrt{(0.1)(9.8)(60)} = 7.7m/s$$

وكما هو متوقع فإن الطريق الجاف يسمح بسرعة أكبر.

الطرق المنحدرة :

عندما تتحرك سيارة دون تزحلق في مسار دائري مستوي على طريق أفقي فإن قوة الاحتكاك السكوني هي المسئولة عن القوة المركزية.

وعندما تتحرك سيارة بسرعة مقدارها v في مسار دائري، بفرض أنه عديم الاحتكاك، يميل بزاوية θ عن الأفقي فإن مركبة القوة العمودية باتجاه المركز (مركز المسار الدائري) هي المسئولة عن التسارع المركزي .



شكل (٣-٥): سيارة تتحرك في مسار دائري مائل

أي أن :

$$F_N \sin\theta = m\frac{v^2}{r} \qquad (5-5)$$

وأيضا حيث أن السيارة لا تتحرك في الاتجاه العمودي فإن :

$$F_N \cos\theta = mg \qquad (5-6)$$

وبقسمة المعادلة (5 - 5) على المعادلة (6 - 5) نحصل على :

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \qquad (5\text{-}7)$$

أو

$$v = \sqrt{rg\ \tan\theta} \qquad (5\text{-}8)$$

أي أن زاوية انحدار المسار الدائري ونصف قطره تحدد قيمة أقصى سرعة للسيارة بغض النظر عن كتلتها.

إلا أن المسار الدائري لا يمكن أن يكون عديم الاحتكاك وعليه فإن القوة المركزية الكلية تكون مجموع القوة الناتجة عن مركبة القوة العمودية والقوة الناشئة عن الاحتكاك السكوني وعليه فإن قيمة السرعة تكون أكبر من قيمتها في حالة فرض أن المسار عديم الاحتكاك.

(٥ - ٢) حركة الأقمار الصناعية في مسارات دائرية :

تكثر هذه الأيام الأقمار الصناعية التي تتحرك في مسارات دائرية حول الأرض.

والقوة المركزية المسببة لحركة قمر صناعي كتلته m في مسار دائري نصف قطره r مقاسا من مركز الأرض هي قوة جذب الأرض له والتي تعطى وفقا لقانون نيوتن للجذب العام بالعلاقة :

$$F_c = G\frac{mM_E}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad (5\text{-}9)$$

حيث G: ثابت الجذب العام أو ثابت نيوتن للجاذبية ويساوي $\left(6.67x10^{-11} N.m^2/kg^2\right)$

M_E: كتلة الأرض ($M_E = 5.98x10^{24} kg$)

أيضا $r = R_E + h$

حيث R_E : نصف قطر الأرض $\left(R_E = 6.38x10^6 km\right)$

h : ارتفاع القمر الصناعي عن سطح الأرض .

وتكون v :

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} \qquad (5\text{-}10)$$

و يجدر ملاحظة أن القمر الصناعي يبقى في مساره إذا كانت سرعته ثابتة وذلك بفرض عدم وجود احتكاك، كما انه كلما قرب القمر الصناعي من الأرض كلما زادت قيمة سرعته.

مثال: احسب قيمة سرعة قمر صناعي يدور حول الأرض على ارتفاع $500km$ فوق سطح الأرض.

الحل:

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\left(6.67x\,10^{-11}\right)\left(5.98x\,10^{24}\right)}{\left(0.500x\,10^{6} + 6.38x\,10^{6}\right)}} = 7.614x\,10^{3}\ m/s$$

ملاحظة: إذا كان الدوران حول جسم فلكي غير الأرض فإننا نستبدل M_E بكتلة الجسم الفلكي.

الزمن الدوري للقمر الصناعي :

من العلاقتين :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (5-11)$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} \qquad (5-12)$$

نحصل على:

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_E}} \qquad (5-13)$$

ومع أن هذه العلاقة للقمر الذي يدور حول الأرض إلا أنها تنطبق أيضا على الكواكب التي تدور حول الشمس بمسارات دائرية تقريبا مع ملاحظة أن M_E تستبدل بكتلة الشمس M_S ونصف القطر r يصبح بعد مركز الكوكب عن مركز الشمس.

كما أن العلاقة توضح أن T تتناسب طرديا مع $r^{3/2}$ أو بصيغة أخرى فإن مربع الزمن الدوري للكوكب حول الشمس يتناسب مع مكعب متوسط المسافة التي تفصلهما $\left(T^2 \propto r^3\right)$ وهو ما يعرف بقانون كبلر الثالث تكريما للعالم جوهانز كبلر.

ويستخدم هذا القانون للمدارات الاهليجية أيضا. والتطبيق الأهم لهذا القانون هو في مجال الاتصالات.

مثال: إذا كان متوسط بعد كوكب بلوتو عن مركز الشمس هو $59 \mathrm{x} 10^{11} m$ وأن متوسط بعد الأرض عن مركز الشمس هو $14.96 \mathrm{x} 10^{10} m$، أوجد زمن دوران بلوتو حول الشمس إذا كان زمن دوران الأرض حول الشمس سنة كاملة $(1yr)$.

الحل:

إذا كانت كتلة الشمس M_S ونصف قطر مسار كوكب الأرض حول الشمس r_E ونصف قطر مسار كوكب بلوتو حول الشمس هو r_P

فإنّ زمن دوران الأرض حول الشمس T_E يكون :

$$T_E = \frac{2\pi r_E^{3/2}}{\sqrt{GM_s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وزمن دوران كوكب بلوتو حول الشمس T_P هو :

$$T_P = \frac{2\pi r_P^{3/2}}{\sqrt{GM_s}} \text{.................................}(2)$$

وبقسمة المعادلة 2 على المعالة 1 نحصل على :

$$\frac{T_P}{T_E} = \left(\frac{r_P}{r_E}\right)^{3/2}$$

ومنها:

$$\frac{T_P}{1} = \left(\frac{59\text{x}10^{11}}{14.96\text{x}10^{10}}\right)^{3/2}$$

$$T_P = 247.68\,yr$$

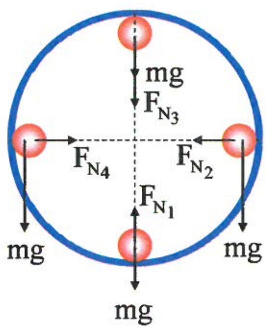
ويستحسن هنا أيضاً ذكر قانون كبلر الأول وقانون كبلر الثاني :

قانون كبلر الأول : تتحرك كواكب المجموعة الشمسية في مسارات اهليجية (على شكل قطع ناقص) تكون الشمس في إحدى بؤرتي المسار.

قانون كبلر الثاني : يقطع الخط الواصل بين الكوكب والشمس أثناء الحركة مساحات متساوية في أزمنة متساوية.

الحركة الدائرية العمودية:

في الحركة الدائرية العمودية تتغير قيمة السرعة أيضا كما يتغير الاتجاه وفي مثل هذه الحالة فإن الحركة تسمى غير منتظمة وحيث أن قيمة السرعة تتغير فإن قيمة التسارع المركزي تتغير وبالتالي تتغير قيمة القوة المركزية.



شكل (٤-٥)

الحركة الدائرية العمودية

وللتسهيل دعنا نتعـرف عـلى القـوة المركزيـة في أربع مواضع على الدائرة حيث تكون القوة المركزية هي محصلة مركبات القوى باتجاه المركز.

وبإهمال قوة الدفع أو الاحتكاك واعتبـار فقـط الـوزن وقـوة رد فعـل السـطح الدائري فإن قيمة القوة المركزية عند المواضع الأربعة تكون :

$$F_{c1} = F_{N1} - mg = m\frac{v_1^2}{r} \qquad (5-14)$$

$$F_{c2} = F_{N2} = m\frac{v_2^2}{r} \qquad (5-15)$$

$$F_{c3} = F_{N3} + mg = m\frac{v_3^2}{r} \qquad (5-16)$$

$$F_{c4} = F_{N4} = m\frac{v_4^2}{r} \qquad (5-17)$$

حيث يتضح انه في القاع (عند أسفل المسار) فإن قوة رد الفعل والوزن في اتجاهين متعاكسين، بينما عند القمة (أعلى المسار) فإن قوة رد الفعل والوزن في نفس الاتجاه وكلاهما في اتجاه المركز.

وفي الموضعين الآخرين فإن قوة رد فعل السطح في اتجاه المركز بينما الوزن يكون مماساً للمسار ولا يسهم في القوة المركزية.

ومن المعلوم أن قيمة سرعة الجسم (دراجة مثلاً) في المثال السابق تكون أقل ما يمكن عند أعلى المسار ووفقا للعلاقة :

$$m\frac{v_3^2}{r} = F_{N3} + mg \qquad (5-18)$$

فإن ذلك يتحقق عندما تكون قوة رد فعل السطح صفرا أي أن $F_{N3} = 0$، وعليه يكون :

$$m\frac{v_3^2}{r} = mg \qquad (5-19)$$

$$v_3 = \sqrt{rg} \qquad (5-20)$$

مثال: شخص يجلس في مقعد يتحرك بسرعة ثابتة v وفي دائرة عمودية نصف قطرها r. بفرض أن المقعد الذي يجلس به الشخص يبقى معتدلاً خلال الحركة، أوجد القوة التي يؤثر بها المقعد على الشخص في أعلى المسار الدائري وفي أسفله.

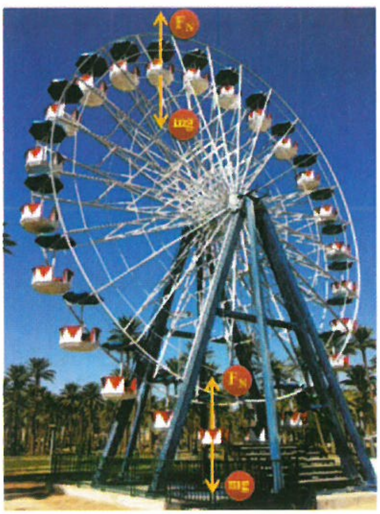
الحل:

في أعلى المسار فإن :

$$mg - F_N = m\frac{v^2}{r}$$

$$F_N = mg - m\frac{v^2}{r}$$

$$F_N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$$



شكل (٥-٥):

القوى المؤثرة على جسم عند أعلى و أسفل موضع له خلال حركته حركة دائرية عمودية

في أسفل المسار:

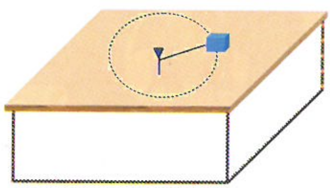
$$F_N - mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$F_N = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right)$$

أي أن قوة دفع المقعد للشخص عند أسفل المسار أكبر منها عند أعلى المسار وهذا ما يشعر به الشخص فعلياً.

أمثلة محلولة

مثال١: صندوق بلاستيكي كتلته $0.2kg$. موصول بخيط طوله $0.25m$ والطرف الآخر للخيط مثبت في دبوس موجود في مركز طاولة عديمة الاحتكاك. إذا كان الصندوق يدور دورتين كاملتين في الثانية، احسب القوة المؤثرة عليه بواسطة الخيط.



الحل:

بما أن الصندوق يدور دورتين كاملتين ($2rev$) في الثانية فإن زمنه الدوري T:

$$2rev \dashrightarrow 1s$$

$$1rev \dashrightarrow T = ?$$

$$T = \frac{1(1)}{2} = 0.5s$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2(3.14)(0.25)}{0.5} = 3.14m/s$$

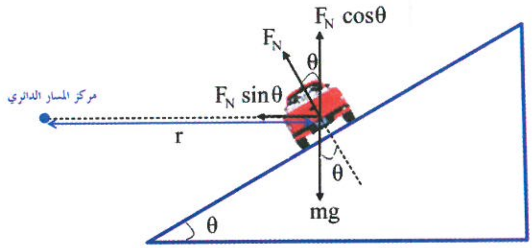
ويكون التسارع المركزي a_c للصندوق:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(3.14)^2}{0.25} = 39.48m/s^2$$

وعليه تكون القوة المركزية F_c :

$$F_c = ma_c = (0.2)(39.48) = 7.9N$$

مثال٢: سيارة سرعتها v تلف منحنى عديم الاحتكاك يميل بزاوية θ عن الأفقي، أوجد الزاوية θ التي تمكن السيارة من الدوران بنجاح.



الحل:

$$F_N \sin\theta = m\frac{v^2}{r}......................(1)$$

وأيضا حيث أن السيارة لا تتحرك في الاتجاه العمودي فإن:

$$F_N \cos\theta = mg......................(2)$$

وبقسمة (1) على (2) نحصل على :

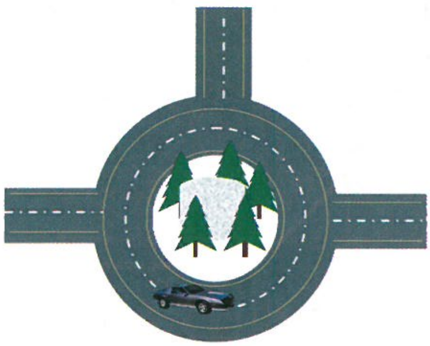
$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}......................(3)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

إذا كانت $v = 20m/s$ ،$r = 200m$ فإن :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(20)^2}{(200)(9.8)} = \tan^{-1}(0.2041) = 11.5^o$$

مثـال٣: تنعطف سيارة في منحنى دائري على طريق مستوٍ. إذا كانت كتلة السيارة m وقوة الاحتكاك بين إطارات السيارة والطريق $0.8mg$، فبأي سرعة يجب أن تتحرك السيارة حتى يتم انعطافها بنجاح إذا كان نصف قطر المنحنى $50m$؟



الحـل:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$0.8mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{0.8gr} = \sqrt{(0.8)(9.8)(50)} = 19.8m/s$$

مثـال٤: يدور القمر حول الأرض في مسار دائري نصـف قطـره $384.551x10^6 m$ بحيث يكمل دورة واحدة في فترة زمنية قدرها $234x10^4 s$. احسب مقدار التسارع المركزي له.

الحـل:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2(3.14)(384.551x\,10^6)}{234x\,10^4} = 1032.6m/s$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1032.6)^2}{384.551x10^6} = 2.77x10^{-3} m/s^2$$

أسئلة وتمارين

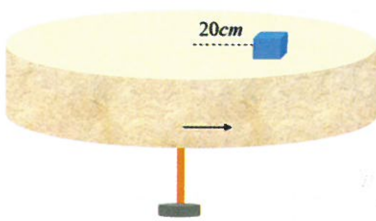
أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

١- إذا علمت أنّ جسماً يتحرك في مسار على شكل ربع دائرة نصف قطرها R في زمن قدره $2s$ ، فإن سرعته تساوي:			
أ- $\frac{\pi R}{2}$	ب- $\frac{\pi R}{4}$	ج- $\frac{\pi R}{8}$	د- πR
٢- شخص يدير كتلة قدرها $1\,kg$ بسرعة مقدارها $4.45\,m/s$ بشكل أفقي بوساطة خيط احد أطرافه مربوط بالكتلة والطرف الآخر في يد الشخص. إذا كانت قوة الشد في الخيط $39.4N$ ، فإن طول الخيط يساوي:			
أ- $1m$	ب- $3.14m$	ج- $0.5m$	د- $2m$
٣- قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري بسرعة $7.22x10^3\,m/s$ حيث يعمل دورة واحدة خلال زمن قدره $1.85hr$. إذا كان نصف قطر الأرض $R_E = 6.38x\,10^6\,km$ ، فإن القمر الصناعي يرتفع عن سطح الأرض بمقدار :			
أ- $0.53x10^6\,m$	ب- $1.28x10^6\,m$	ج- $2.55x10^6\,m$	د- $1.67x10^6\,m$
٤- قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري نصف قطره r_1 وقمر صناعي آخر يدور حول الأرض في مسار دائري نصف قطره r_2 ، فإن النسبة بين الزمن الدوري للثاني نسبة إلى الأول تساوي:			
أ- $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}$	ب- $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}$	ج- $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$	د- $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$
٥- شركة تنفذ مشروع طريق فيها منعطف نصف قطره $40m$ ويميل بزاوية θ . إذا كانت السرعة الآمنة المسموح بها في ذلك المنعطف هي $40km/h$ ، فإن زاوية انحدار المنعطف θ تساوي:			
أ- 17.5^o	ب- 40^o	ج- 1.6^o	د- 72^o

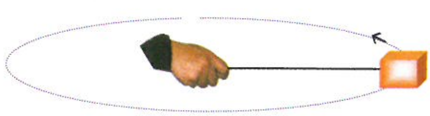
ثانيا:

١ - في ذرة الهيدروجين يدور الإلكترون في مسار دائري قطره $1x\,10^{-10}m$ حول النواة دورة كاملة خلال زمن $1.5x\,10^{-16}s$. احسب تسارعه المركزي والقوة المركزية المؤثرة عليه علماً بأن كتلة الإلكترون $9.11x10^{-31}kg$.

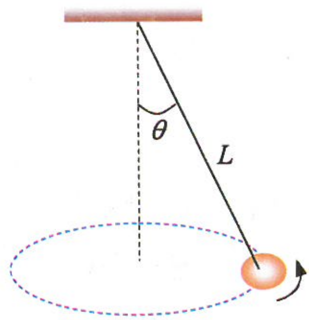
٢- صندوق موجود على قرص يدور بحيث يبعد الصندوق مسافة $20cm$ عن مركز القرص الذي يعمل 60 دورة في الدقيقة، وإذا زادت سرعة دوران القرص فإن الصندوق ينزلق. احسب معامل الاحتكاك السكوني بين الصندوق والقرص.



٣ - جسم كتلته $0.2kg$ مربوط في طرف خيط طوله $1m$ ويتحرك في مستوى أفقي كما في الشكل. إذا كانت أقصى قوة شد في الخيط $30N$ احسب أقصى سرعة يمكن أن يتحرك بها الجسم قبل أن ينقطع الخيط.



٤ – إذا كان البندول المخروطي يتركب من كرة معلقة بخيط وتدور في المستوى الأفقي كما في الشكل أدناه، أوجد سرعة الكرة بدلالة طول الخيط L والزاوية θ.

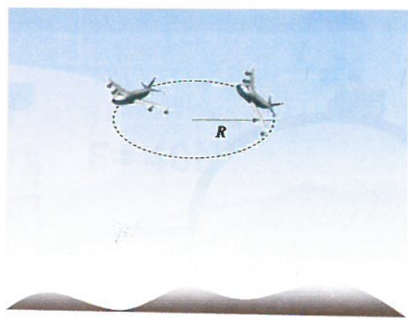


٥ – إذا علمت أنّ كوكب الزهرة يدور حول الشمس على بعد $1.08x10^{11}m$، احسب:

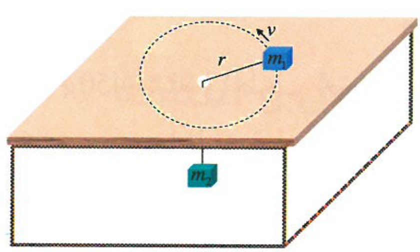
أ – الزمن اللازم لكوكب الزهرة حتى يدور دورة كاملة حول الشمس.
ب – النسبة بين سرعة كوكب الزهرة وسرعة كوكب الأرض حول الشمس علماً بأن بعد الأرض عن الشمس $1.50x\,10^{11}m$.

أسئلة تحدي

١- إذا كانت قوة الدفع إلى أعلى المؤثرة على طائرة (انظر الشكل) تساوي أربعة أضعاف وزنها، فما هي زاوية ميل مسار الطائرة على ارتفاع ثابت والتي تحافظ على سلامة الطائرة خلال حركتها في مسار دائري نصف قطره R ؟



٢- جسمان كتلتاهما m_2 و m_1 مربوطان ببعضهما بخيط حيث أن m_1 يدور على طاولة ملساء و m_2 يتدلى بوساطة الخيط من ثقب في مركز الطاولة. أوجد سرعة الجسم m_1 بحيث يبقى الجسم m_2 ساكناً.



٣- إذا كان التسارع المركزي لجسم (عينة) في أجهزة الطرد الطبية هو $6280g$ حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، احسب عدد الدورات التي تدورها العينة في الدقيقة إذا كان نصف قطر دورانها $5cm$.

٤ - احسب أقصى سرعة لقمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري حيث أن نصف قطر الأرض $R_E = 6.38x10^6 m$ وكتلة الأرض $M_E = 5.98x10^{24} kg$.

٥ - إذا علمت أن سائق دراجة يصعد تلة بشكل قوس دائري (انظر الشكل) نصف قطره $50m$، احسب أقصى سرعة للدراجة عند قمة التلة التي تبقي الدراجة ملامسة للتلة.

٦ - طائر يطير في مسار دائري أفقي نصف قطره $15m$ بسرعة ثابتة $5m/s$.

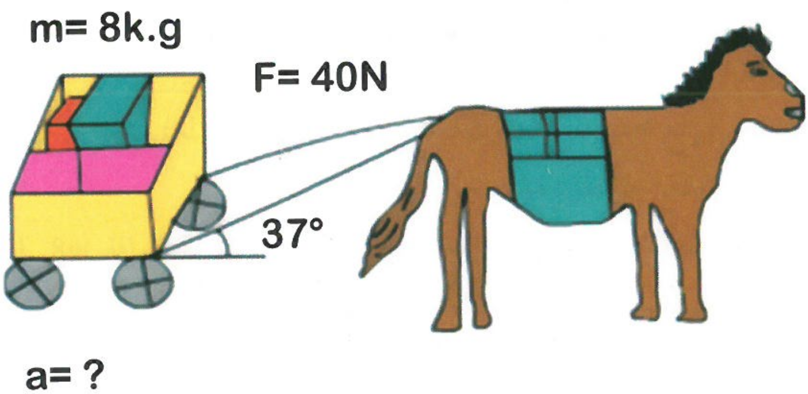
أ - احسب التسارع المركزي للطائر.

ب - إذا زادت سرعة الطائر في مساره بمعدل $1.5m/s^2$، احسب تسارعه الكلي (مقداراً واتجاهاً).

٧ - أديرت كرة كتلتها $450g$ مثبتة في طرف خيط في دائرة أفقية تقريباً نصف قطرها $1.25m$ وكانت سرعتها المماسية في الدائرة $8.5m/s$. بأخذ وزن الكرة بالاعتبار أوجد :

أ - الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأفقي.

ب - الشد في الخيط.



الوحدة السادسة

الشغل و الطاقة

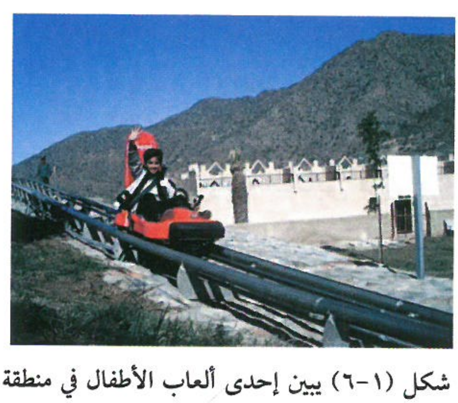
الشغل والطاقة

- شخص يرفع مجموعة كتب ويتحرك بشكل أفقي داخل المكتبة، هل ينجز شغلا؟
- شخص يدفع حائطاً ، هل ينجز شغلاً ؟
- كلف شخصان بسحب خزانتين متماثلتين داخل غرفة لمسافة $8m$. إذا علمت أن الأول قد أنجز عمله قبل الآخر، أيهما أكثر قدرة ؟

(٦-١) الشغل:

إذا كانت القوة المؤثرة $\vec{F}$ في سحب صندوق على سطح أفقي أملس في نفس اتجاه الإزاحة المحصلة $\vec{s}$ للصندوق، فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة W_F يعرف بأنه حاصل ضرب مقدار القوة F مع مقدار الإزاحة s، أي أن :

$$W_F = Fs \qquad (6 - 1)$$



شكل (١-٦) يبين إحدى ألعاب الأطفال في منطقة الهدا بالطائف حيث ينزلق الطفل في عربته من أعلى منحدر إلى أسفله. بفرض عدم وجود احتكاك فإن الشغل المبذول يكون بواسطة الجاذبية الأرضية.

وتبين هذه المعادلة أن وحدة الشغل في النظام العالمي للوحدات هي $N.m$ أو $kg\frac{m^2}{s^2}$ $kg\frac{m}{s^2}.m =$ وتسمى هذه الوحدة الجول ويرمز لها بالرمز J وذلك تخليداً للعالم جيمس جول وتكون وحدة الشغل في النظام الفرنسي $g\frac{cm^2}{s^2}$ وتسمى الأَرج (erg) ويمكن إثبات أن $1J = 10^7 erg$ و أيضا تبين المعادلة أنه حتى تنجز قوة ما شغلاً فإنه يجب أن يحصل إزاحة. ويجدر التنويه إلى أن الشغل كمية قياسية.

تساؤل : ما هي أبعاد الشغل ؟

مثال: يدفع شاب خزانة أفقياً بقوة قدرها $100N$ فيحركها مسافة $2m$ بنفس الاتجاه . احسب الشغل الذي يبذله الشاب.

محاكاة

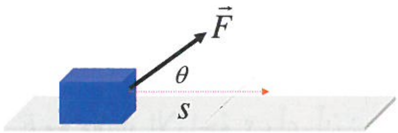
الحل:

$$W_F = Fs$$

$$W_F = (100)(2) = 200\,J$$

وبناءاً على التعريف السابق فإنه إذا كانت القوة المؤثرة $\vec{F}$، وقيمتها ثابتة F، تصنع زاوية θ مع الإزاحة المحصلة $\vec{s}$ للجسم فإن مركبة القوة الموازية للإزاحة هي فقط التي تبذل شغلا، أي أن:

$$W_F = (F\cos\theta)s \qquad (6-2)$$

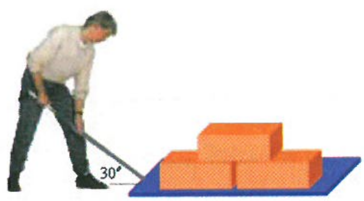


شكل (٢-٦):
قوة تؤثر على جسم وتميل عن الأفقي بزاوية

والمركبة العمودية للقوة لا تبذل شغلاً حيث أنها لا تحدث إزاحة وعليه فإن الشغل الذي تبذله قوة عمودية على الإزاحة يكون دائما صفر. إضافة إلى ذلك فإن الشغل قد يكون سالبا كأن تكون القوة بعكس الإزاحة مثلا كما هو الحال في الشغل الذي تبذله قوة الاحتكاك.

مثال: يسحب شخص لوحاً وعليه قطع طوب بقوة $100N$ بزاوية 30^o فيحركها مسافة $5m$ (أنظر الشكل) ، احسب الشغل الذي يبذله الشخص.

محاكاة



الحل:

$$W_F = (F\cos\theta)s$$

$$W_F = (100\cos 30)(5) = 433J$$

تساؤل : في المثال السابق إذا بذل الشاب نفس الشغل بقوة أفقية، احسب مقدار القوة.

(٦-٢) طاقة الحركة :

تعرف طاقة الحركة، والتي يرمز لها بالرمز KE، لجسم ما كتلته m وسرعته $\vec{v}$ بالعلاقة :

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6\text{-}3)$$

وتكون وحدة KE في النظام العالمي هي الجول (J) أي أن وحدة طاقة الحركة هي نفسها وحدة الشغل. كما أن طاقة الحركة هي أيضا كمية قياسية.

نظرية الشغل والطاقة :

هي العلاقة التي تربط الشغل W الذي تبذله قوة خارجية أو محصلة قوى خارجية على جسم كتلته m بالتغير في طاقة حركة الجسم وتعطى على الصورة :

$$W = KE_f - KE_i \qquad (6\text{-}4)$$

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (6\text{-}5)$$

وإذا كان الشغل الذي تبذله محصلة القوى الخارجية موجباً فإن طاقة الحركة تزداد، وإذا كان الشغل سالباً فإن طاقة الحركة تقل، وإذا كان الشغل صفراً فإن طاقة الحركة لا تتغير (سرعة الجسم تبقى ثابتة). وبعبارة أخرى فإنّ الشغل الموجب يعني انتقال الطاقة للجسم مما يؤدي إلى ازدياد طاقة حركته، والشغل السالب يعني فقدان الجسم للطاقة مما يؤدي إلى تناقص طاقة حركته.

وتجدر الإشارة إلى أنّ نظرية الشغل والطاقة يمكن استنتاجها من قانون الحركة المستقيمة في الوحدة الثالثة (معادلة 9-3):

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o) \qquad (3\text{-}9)$$

وذلك بضرب الطرفين بالكتلة m وترتيب الحدود لنحصل على :

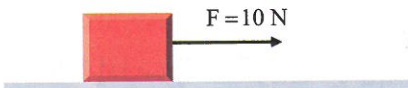
$$ma(x - x_o) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 \qquad (6\text{-}6)$$

أي أنّ :

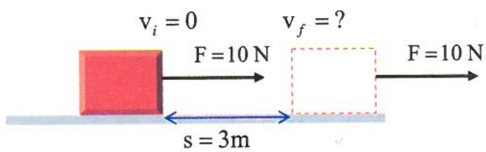
$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (6\text{-}5)$$

مثال: أثرت قوة أفقية $10N$ على جسم كتلته $4kg$ ساكن على سطح أفقي عديم الاحتكاك. احسب سرعة الجسم بعد أن يتحرك مسافة $2m$.

الحل:



بما أن القوة الخارجية المؤثرة أفقية وباتجاه الإزاحة فإن :



$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$Fs = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$(10)(2) = \frac{1}{2}4(v_f)^2 - \frac{1}{2}4(0)^2$$

$$(v_f)^2 = 10$$

$$v_f = \sqrt{10} = 3.16\ m/s$$

تساؤل: حل المثال السابق إذا كان هناك احتكاك ومعامل الاحتكاك الحركي 0.10.

تساؤل: حل المثال السابق باستخدام قوانين نيوتن ومعادلات الحركة.

(٣-٦) طاقة الوضع:

ومن القوى الهامة التي تعمل (تبذل) شغلا موجباً أو سالباً قوة الجاذبية الأرضية ومن المعلوم أن قوة الجاذبية الأرضية لجسم ما كتلته m هي وزنه mg والتي يكون اتجاهها إلى أسفل باتجاه مركز الأرض.

شكل(٣-٦) يوضح إحدى عربات لتلفريك الهدا بالطائف حيث تنطلق من مرتفعات الهدى باتجاه مكة المكرمة. ماذا يحصل لطاقة الوضع؟

فمثلا إذا سقطت كرة كتلتها m من ارتفاع h_i من سطح الأرض إلى ارتفاع h_f فإن إزاحة الكرة تكون $h = h_i - h_f$ إلى أسفل وعليه يكون الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية W_g على الكرة :

$$W_g = mg(\cos 0)(h) \qquad (6-7)$$

$$W_g = mg(h_i - h_f) \qquad (6-8)$$

ملاحظة : ووفقاً للاصطلاح السابق (المتجهات سالبة إلى أسفل) فإن

$$W_g = (-mg)(\cos\theta)(-h) \qquad (6-9)$$

$$W_g = mg(\cos\theta)h \qquad (6-10)$$

وهي نفس النتيجة.

ويكون هذا الشغل هو نفسه بغض النظر عن المسار الذي تسلكه الكرة عند سقوطها (انتقالها من h_i إلى h_f) ونلاحظ أن المهم هو الفرق بين

موقعي الكرة وعليه ليس هناك ضرورة لقياسها من سطح الأرض بل يمكن قياسها بالنسبة إلى أي مستوى إسناد (إطار مرجعي) والذي نفترض عادة أن طاقة الوضع عنده تساوي صفر.

ويمكن كتابة العلاقة أعلاه على الصورة:

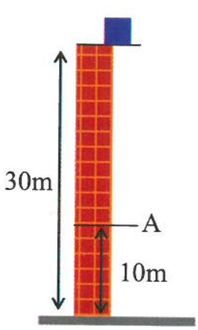
$$W_g = -\left(mgh_f - mgh_i\right) \qquad (6-11)$$

وتعرف القيمة mgh، والذي ترتبط بموضع الجسم أو ارتفاعه عن مستوى الإسناد والذي غالبا ما يؤخذ سطح الأرض، بطاقة الوضع (PE) في مجال الجاذبية. وعليه يكون:

$$W_g = -\left(PE_f - PE_i\right) \qquad (6-12)$$

حيث يمثل الطرف الأيمن الفرق بين طاقتي الوضع الابتدائية و النهائية، والإشارة السالبة تبين أن طاقة الوضع تقل عندما ينتقل الجسم من موضع إلى موضع أسفل منه في مجال الجاذبية الأرضية.

وتجدر الإشارة إلى أن وحدة طاقة الوضع في النظام العالمي للوحدات هي الجول أيضا، كما أن طاقة الوضع كمية قياسية.



مثال: احسب التغير في طاقة الوضع، بين سطح العمارة والمستوى A، لجسم كتلته $2kg$ موجود على سطح العمارة والذي يرتفع $30m$ عن سطح الأرض بفرض أن إطار الإسناد هو الأرض تارة وأخرى بفرض أن إطار الإسناد هو المستوى A.

الحل: **محاكاة**

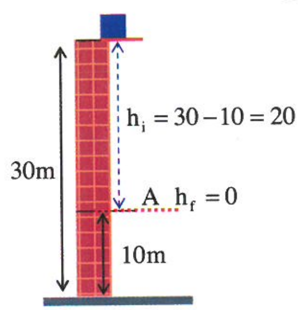
بفرض أن إطار الإسناد هو الأرض $h_i = 30m$, $h_f = 10m$

$$\Delta PE = PE_f - PE_i$$

$$\Delta PE = mgh_f - mgh_i$$

$$\Delta PE = 2(9.8)(10) - 2(9.8)(30) = -392J$$

وإذا افترضنا أن إطار الإسناد هو المستوى A تصبح $h_i = 20m$, $h_f = 0m$ كما هو موضح في الشكل



$$\Delta PE = mgh_f - mgh_i$$

$$\Delta PE = 2(9.8)(0) - 2(9.8)(20) = -392J$$

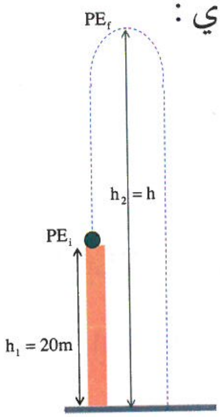
والإشارة السالبة تعني أن هناك نقصان في طاقة الوضع.

ويجدر التنبيه إلى أن التغير في طاقة الوضع لا يعتمد على إطار الإسناد.

مثال: قذف جسيم كتلته $2kg$ من نقطة ترتفع $20m$ عن سطح الأرض رأسياً إلى أعلى. إذا زادت طاقة الوضع للجسم بمقدار $500J$ عند وصوله لأقصى ارتفاع، أوجد أقصى ارتفاع يصله الجسم.

الحل:

نلاحظ بأن طاقة الوضع زادت بمقدار $500J$ عندما انتقل الجسم من الوضع الابتدائي إلى الوضع النهائي عند أقصى ارتفاع، أي :



$$\Delta PE = mgh_f - mgh_i$$

$$500 = 2(9.8)(h_f) - 2(9.8)(20)$$

$$2(9.8)h = 2(9.8)(20) + 500$$

$$h = 45.5m$$

وترتبط طاقة الوضع بالقوى المحافظة كقوة الجاذبية (الوزن) كما أنها لا تعرّف للقوى الغير محافظة كقوة الاحتكاك مثلا، وتسمى القوة بالقوة المحافظة إذا كان الشغل الذي تبذله على جسم لا يعتمد على المسار الذي يسلكه الجسم بين نقطتين.

وفي الحياة العملية غالبا ما يكون هناك قوى محافظة (conservative) وقوى غير محافظة (nonconservative) وعليه يكون الشغل الذي تبذله محصلة القوى الخارجية W_F هو مجموع ما تبذله القوى المحافظة W_c والقوى غير المحافظة W_{nc} ويعرف بالشغل الكلي W_{net} وعليه فإن نظرية الشغل والطاقة:

$$W_F = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (6-5)$$

تكتب على الصورة :

$$W_c + W_{nc} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (6-13)$$

أو

$$W_{net} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (6-14)$$

فمثلا إذا كانت القوى المحافظة فقط هي قوة الجاذبية فإن:

$$-\left(mgh_f - mgh_i\right) + \mathrm{W}_{\mathrm{nc}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (6-15)$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{nc}} = \left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right) + \left(mgh_f - mgh_i\right) \qquad (6-16)$$

أو

$$\mathrm{W}_{\mathrm{nc}} = \left(KE_f - KE_i\right) + \left(PE_f - PE_i\right) \qquad (6-17)$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{nc}} = \Delta KE + \Delta PE \qquad (6-18)$$

حيث الرمز Δ يلفظ دلتا ويعني التغير (الفرق). ووفقاً لهذه العلاقة فإنه في حال عدم وجود قوى غير محافظة (كالاحتكاك مثلاً) فإن

$$0 = \Delta KE + \Delta PE \qquad (6-19)$$

أو

$$\Delta KE = -\Delta PE \qquad (6-20)$$

وهذا يعني أن النقصان في إحدى الطاقتين يرافقه زيادة في الأخرى.

محاكاة

ويمكن أيضاً التعبير عن نظرية الشغل والطاقة على الصورة:

$$W_{nc} = (KE_f + PE_f) - (KE_i + PE_i) \quad (6\text{-}21)$$

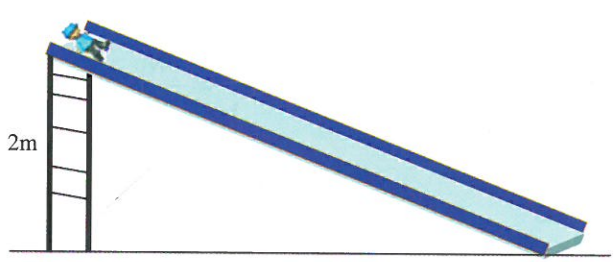
$$W_{nc} = E_f - E_i \quad (6\text{-}22)$$

حيث E تمثل مجموع طاقتي الوضع والحركة وتعرف بالطاقة الميكانيكية الكلية وعليه فإن المعادلة أعلاه تعني أن الشغل المبذول بواسطة القوى غير المحافظة يساوي التغير في الطاقة الميكانيكية. وعندما $W_{nc} = 0$ فإن

$$E_f = E_i \quad (6\text{-}23)$$

وهذا هو مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية ويتضمن أنه إذا نقصت إحدى الطاقتين (الحركة أو الوضع) فإن الأخرى تزداد أي تتحول طاقة الحركة إلى طاقة وضع أو طاقة الوضع إلى طاقة حركة وبشكل عام فإنه يمكن للطاقة أن تتحول من شكل لآخر لكنها لا تفنى ولا تخلق من عدم.

مثال: طفل ينزلق من السكون على منحدر عديم الاحتكاك ارتفاعه $2m$. احسب سرعة الطفل عند أسفل المنحدر.



الحل: **محاكاة**

بما أنه لا يوجد قوى غير محافظة فإن:

$$E_i = E_f$$

$$mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$m(9.8)(2) + \frac{1}{2}(2)(0)^2 = m(9.8)(0) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$m(9.8)(2) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f^2 = 39.2$$

$$v_f = 6.26\, m/s$$

(٦-٤) القدرة:

في حالات عديدة يكون الزمن اللازم لانجاز شغل لا يقل أهمية عن الشغل المنجز، والكمية الفيزيائية التي تعرّف بدلالة الشغل والزمن هي القدرة حيث أن القدرة P هي الشغل المبذول W في وحدة الزمن t أو معدل انجاز الشغل والذي نحصل عليه بقسمة الشغل على الزمن، أي أن :

$$P = \frac{W}{t} \qquad (6\text{-}24)$$

وتكون وحدة القدرة في النظام العالمي J/s والتي تسمى واط $Watt$ تكريما للعالم جيمس واط الذي طور الآلة البخارية ويرمز لها بالرمز W

وبما أن الشغل والزمن كميات قياسية فإن القدرة كمية قياسية أيضاً.

تساؤل : بين أن ١ كيلو واط ساعة (وحدة الطاقة الكهربائية) تساوي $3.6x\,10^6$ جول (أو $1kWh = 3.6x\,10^6 J$).

وباستخدام تعريف الشغل $W = Fs$ حيث اعتبرنا القوة والإزاحة في نفس الاتجاه، إضافة إلى تعريف القدرة:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} \qquad (6\text{-}25)$$

فإننا نحصل على:

$$P = Fv \qquad (6\text{-}26)$$

أي أن هناك تعريف آخر للقدرة وهي حاصل ضرب قيمتي القوة والسرعة عندما تكون القوة والإزاحة أو (السرعة) في نفس الاتجاه.

وتسمى القدرة بالمتوسطة إذا كانت السرعة متوسطة (خلال فترة زمنية) كما تسمى بالقدرة اللحظية إذا كانت السرعة لحظية (عند لحظة معينة أو زمن محدد).

مثال: سيارة كتلتها $1500kg$ تسارعت من السكون حتى أصبحت سرعتها $20m/s$ في زمن قدره $8s$. احسب متوسط قدرة محرك السيارة.

الحل:

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W = \frac{1}{2}(1500)(20)^2 - \frac{1}{2}(1500)(0)^2 = 3x10^5\,J$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{3x\,10^5}{8} = 37500W = 37.5kW$$

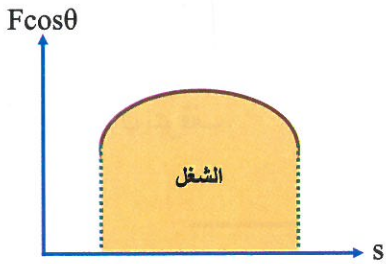
الشغل المبذول بواسطة قوة متغيرة:

إذا كانت القوة تتغير مع الإزاحة فإننا لا نستطيع استخدام العلاقة

$$W_F = (F\cos\theta)s \qquad (6-2)$$

لإيجاد الشغل لأن هذه العلاقة صحيحة فقط إذا كانت القوة ثابتة (لا تتغير). ومع ذلك يمكن إيجاد الشغل المبذول بواسطة قوة متغيرة باستخدام الرسم حيث يكون الشغل المبذول بواسطة قوة متغيرة في تحريك جسم ما يساوي المساحة تحت

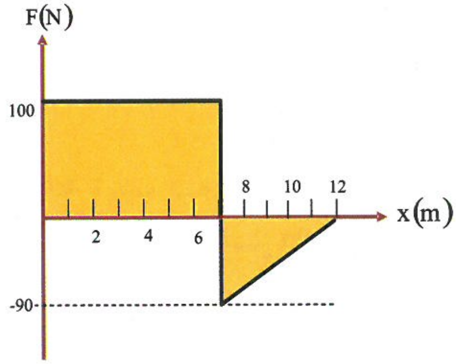
منحنى $F\cos\theta$ (على محور الصادات) مع s (على محور السينات) كما يوضح الشكل أدناه. ويجدر التنبيه أن المساحة يعبرّ عنها ب"التكامل" رياضياً.



شكل (٤-٦): تمثيل الشغل بالمساحة

تحت منحنى القوة والإزاحة

مثال: قوة تؤثر على جسيم وتتغير مع الإزاحة x كما في الشكل أدناه، احسب مقدار الشغل المبذول بواسطة القوة عندما يتحرك الجسم من $x = 0$ إلى $x = 12m$.



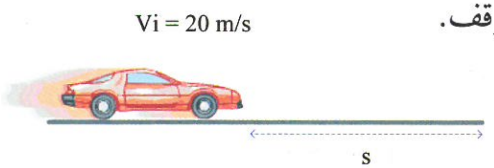
الحل:

الشغل يمثل المساحة الكلية تحت منحى القوة مع الإزاحة :

$$W = (7x100) + \left[\frac{1}{2}(12-7)(-90)\right] = 475J$$

أمثلة محلولة

مثال١: سيارة تتحرك بسرعة $20m/s$ ثم توقفت بفعل الفرامل. إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين عجلات السيارة والشارع 0.4، احسب المسافة التي قطعتها السيارة قبل أن تتوقف.



الحل:

$$W_{nc} = E_f - E_i$$

$$(f_k \cos 180)s = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$-f_k s = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$(-\mu_k F_N)s = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

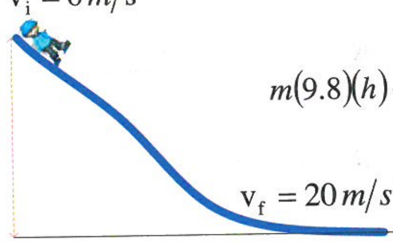
$$(-\mu_k mg)s = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$v_i^2 = 2(\mu_k g)s$$

$$s = \frac{v_i^2}{2\mu_k g} = \frac{(20)^2}{2(0.4)(9.8)} = 51m$$

مثال٢: شخص كتلته $50kg$ ينزلق من السكون من قمة سطح منحدر عديم الاحتكاك للألعاب المائية في منتجع الكر السياحي بمكة المكرمة. إذا وصل أسفل المنحدر بسرعة $20m/s$، ما هو ارتفاع المنحدر؟

الحل:



$$E_i = E_f$$

$$mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

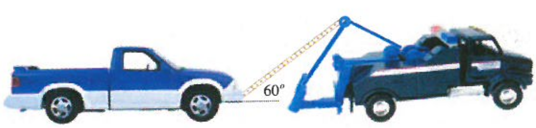
$$m(9.8)(h) + \frac{1}{2}(2)(0)^2 = m(9.8)(0) + \frac{1}{2}m(20)^2$$

$$m(9.8)(h) = \frac{1}{2}m(20)^2$$

$$h = 20.4m$$

مثال٣: ونش سيارة مرور يبذل شغلاً مقداره $10^5 J$ لسحب سيارة مخالفة على طريق أفقي باستخدام حبل يميل بزاوية 60^o لمسافة قدرها $1km$. احسب مقدار الشد في الحبل.

الحل:



$$W_F = (F\cos\theta)s$$

$$10^5 = (T\cos 60)(1000)$$

$$T = 200\ N$$

مثال٤: سيارة تتحرك بسرعة ابتدائية v_o لحظة استخدام السائق للفرامل ثم توقفت بعد أن انزلقت مسافة قدرها d. احسب المسافة التي تنزلقها السيارة إذا كان نفس تأثير الفرامل ولكن السرعة الابتدائية $2v_o$.

الحل:

بفرض أن قوة الفرامل هي قوة الاحتكاك f_k التي توقف السيارة، وباستخدام قانون الشغل والطاقة:

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$(F\cos\theta)s = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$(f_k\cos 180)d = \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$-f_k d = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$d = \frac{mv_o^2}{2f_k}$$

وبالمثل إذا كانت السرعة الابتدائية $2v_o$ فإن :

$$(f_k\cos 180)s = 0 - \frac{1}{2}m(2v_o)^2$$

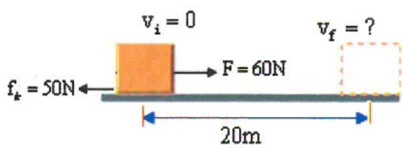
$$f_k s = \frac{1}{2}m(2v_o)^2$$

$$s = 4\frac{mv_o^2}{2f_k}$$

$$s = 4d$$

نلاحظ بأن مضاعفة سرعة السيارة يؤدي إلى زيادة المسافة اللازمة للتوقف إلى أربعة أضعاف. ولذا ينصح السائقون بعدم التهور والالتزام بالسرعة المناسبة وعدم تجاوز السرعة المسموح بها إطلاقاً.

مثال٥: يسحب شخص صندوق كتلته $20kg$ لمسافة $20m$ بتأثير قوة أفقية قدرها $60N$. إذا كانت قوة الاحتكاك $50N$، احسب الشغل الكلي المبذول لتحريك الصندوق، ثم احسب سرعة الجسم عند نهاية المسافة $20m$ إذا تحرك الصندوق من السكون.



الحل:

الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة F :

$$W_F = Fs$$

$$W_F = 60(20) = 1200J$$

الشغل المبذول بواسطة قوة الاحتكاك :

$$W_f = (f_k \cos 180)s = -f_k s$$

$$W_f = -(50)(20) = -1000J$$

فيكون الشغل الكلي W_{net} :

$$W_{net} = 1200 - 1000 = 200J$$

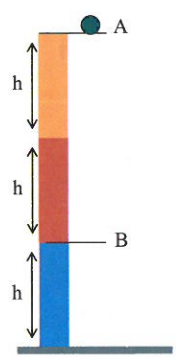
لحساب السرعة النهائية نستخدم نظرية الشغل والطاقة :

$$W_{net} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$200 = \frac{1}{2}(20)v_f^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

$$v_f = 4.47\, m/s$$

مثال٦: الشكل المجاور يبين جسم يسقط سقوطاً حراً. أوجد نسبة طاقة الحركة له عند الموضع B نسبة للطاقة الميكانيكية للجسم.



الحل:

نحسب الطاقة الحركية للجسم عند B:

$$PE_i + KE_i = PE_f + KE_f$$

$$mg(3h) + 0 = mg(h) + KE_f$$

$$2mgh = KE_f = KE_B$$

في غياب القوى غير المحافظة فإن الطاقة الميكانيكية محفوظة :

$$E_i = E_f = E$$

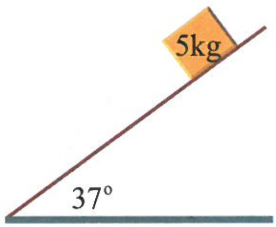
$$mg\,(3h) + 0 = E$$

$$3mgh = E$$

وعليه فإن نسبة الطاقة الحركية للجسم عند B إلى الطاقة الميكانيكية تكون :

$$\frac{KE_B}{E} = \frac{2mgh}{3mgh} = \frac{2}{3} = 0.67$$

مثال٧: ينزلق جسم كتلته $5kg$ من السكون على سطح خشن $(\mu_k = 0.5)$ يميل عن الأفقي بزاوية 37^o. إذا تحرك الجسم مسافة $0.6m$، احسب :



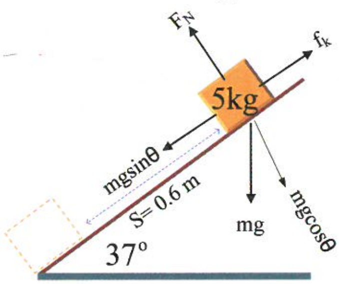
١ - الشغل الناتج عن وزن الجسم

٢ - الشغل الناتج عن قوة الاحتكاك.

٣ - سرعة الجسم بعد أن قطع المسافة $0.6m$.

الحل:

١- مركبة الوزن باتجاه الحركة هي $mg \sin\theta$ فالشغل الناتج عنها يكون :



$$W = Fs = (mg \sin\theta)(s)$$

$$W_g = (5)(9.8)(\sin 37)(0.6) = 17.7J$$

٢ - لحساب الشغل الناتج عن قوة الاحتكاك :

$$W_k = f_k .s \cos 180 = -f_k s = -(\mu_k F_N)s$$

$$W_k = -\mu_k (mg \cos\theta)s$$

$$W_k = -(0.5)(5)(9.8)(\cos 37)(0.6) = -11.74J$$

٣ - لحساب سرعته بعدما قطع المسافة $0.6m$:

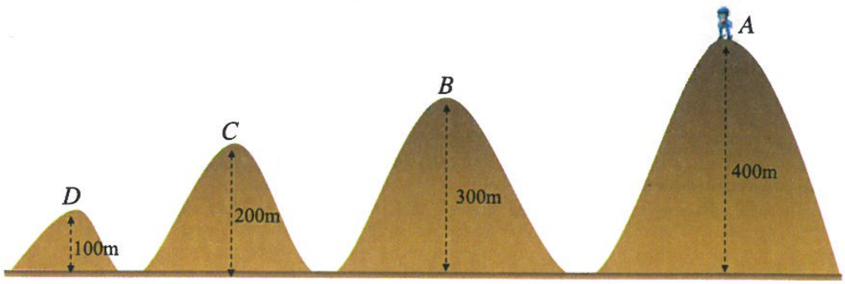
$$W_{net} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$17.7 - 11.74 = \frac{1}{2}(5)v_f^2 - \frac{1}{2}(5)(0)^2$$

$$5.96 = \frac{1}{2}(5)v_f^2$$

$$v_f = 1.54\, m/s$$

مثال٨: متزلج يبدأ الحركة من السكون من النقطة A . باعتبار أن المسار عديم الاحتكاك، احسب سرعة المتزلج عند النقطة D .



الحل:

$$E_i = E_f$$

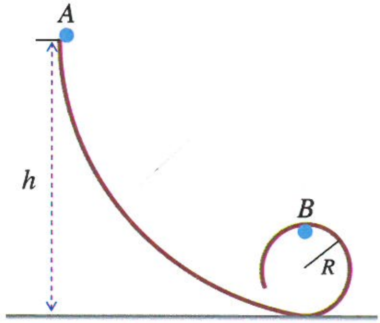
$$mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$mg(400) + 0 = mg(100) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 600g$$

$$v = \sqrt{600g} = \sqrt{600(9.8)} = 76.7m/s$$

مثال٩: خرزة كتلتها $m = 20g$ تنزلق من السكون عند النقطة A على سلك عديم الاحتكاك (انظر الشكل). إذا كانت $h = 25cm$ ، $R = 5cm$ ، ما هي القوة التي يؤثر بها السلك على الخرزة عندما تكون عند النقطة B ؟



الحل:

$$E_A = E_B$$

$$mgh = mg\left(2R\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2g\left(h - 2R\right)$$

$$v = \sqrt{2g\left(h - 2R\right)}$$

$$v = \sqrt{2\left(9.8\right)\left(0.25 - 0.10\right)} = 1.715m/s$$

عند النقطة B:

$$mg + F_N = m\frac{v^2}{R}$$

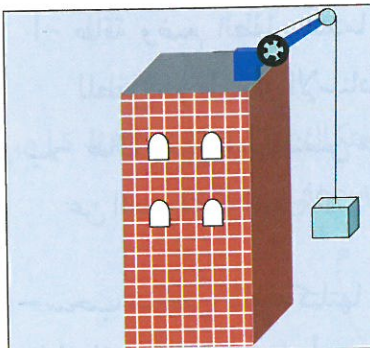
$$F_N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

$$F_N = \left(0.02\right)\left(\frac{\left(1.715\right)^2}{0.05} - 9.8\right) = 0.98N$$

أسئلة وتمارين

أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

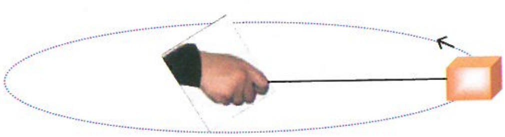
١- أثرت قوة مقدارها $20N$ تميل بزاوية θ عن محور السينات الموجب على جسم فأزاحته $3m$ باتجاه محور السينات. إذا كان الشغل المبذول بواسطة القوة $30J$ فإن الزاوية θ :			
أ- 30^o	ب- 60^o	ج- 90^o	د- 0^o
٢- شخص يرفع طوبة كتلتها $3kg$ كما في الشكل المجاور ويتحرك داخل الغرفة مسافة $12m$. فإن الشغل المبذول على الطوبة من الجاذبية يساوي :			
أ- $36J$	ب- $352.8J$	ج- $29.4J$	د- $0J$
٣- في السؤال السابق إذا رفع الشخص الطوبة بسرعة ثابتة مسافة $1m$ إلى أعلى فإن الشغل الذي يبذله يساوي :			
أ- $88.2J$	ب- $352.8J$	ج- $29.4J$	د- $0J$
٤- جسم يتحرك بسرعة v_o وطاقته الحركية عندها KE_0 . إذا تحرك نفس الجسم بسرعة $2v_o$ ، فإن طاقته الحركية تصبح :			
أ- $\frac{1}{4}KE_o$	ب- $4KE_o$	ج- $2KE_o$	د- KE_o

	٥- في الشكل المجاور تستخدم رافعة كهربائية قدرتها $200W$ لرفع جسم بسرعة ثابتة قدرها $0.05m/s$. احسب كتلة الجسم.

د- $98\,kg$	ج- $10kg$	ب- $4000\,kg$	أ- $408kg$

ثانيا:

١- جسم كتلته $0.2kg$ مربوطاً في طرف خيط طوله $1m$ ويتحرك في مستوى أفقي بسرعة $2m\,/\,s$ كما في الشكل. احسب الشغل المبذول بواسطة قوة الشد على الجسم.



٢ - قذف جسم للأعلى بسرعة ابتدائية $6m/s$. احسب الارتفاع الذي تصبح عنده طاقة الحركة ربع طاقة الحركة الابتدائية.

٣ - طفل كتلته $15kg$ يتأرجح في أرجوحة بوساطة حبل طوله $2m$. أوجد:

أ- طاقة وضع الطفل عندما يكون الحبل أفقياً وبفرض أن اخفض وضع للطفل هو مستوى الإسناد.

ب- طاقة وضعه نسبة لنفس مستوى الإسناد السابق وذلك عندما يميل الحبل عن العمودي بزاوية 30^o.

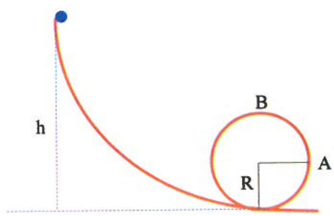
٤ – سحب شخص طاولة كتلتها $9kg$ بقوة تصنع زاوية 20^o مع الأفقي فتحركت الطاولة مسافة $10m$ على أرضية الغرفة بسرعة ثابتة. إذا كان معامل الاحتكاك الحركي 0.3، احسب الشغل الذي يبذله الشخص.

٥ – رافعة قدرة محركها $200W$ تستخدم لرفع مادة بناء كتلتها $200kg$ بسرعة ثابتة. احسب الزمن اللازم لرفع مادة البناء إلى ارتفاع $10m$.

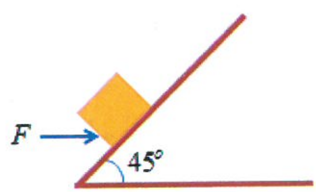
٦- يريد شخص أن يحمّل خزانة كتلتها $80kg$ في سيارة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار $1m$ كما في الشكل مستخدما لوح عديم الاحتكاك طوله L. إذا دفع الشخص الخزانة بسرعة ثابتة، احسب طول اللوح L مستخدماً نظرية الشغل والطاقة.

أسئلة تحدي

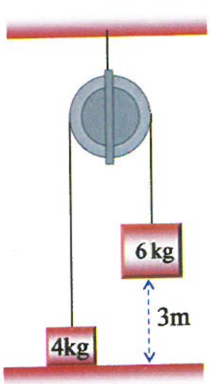
١- جسيم ينزلق من السكون على مسار عديم الاحتكاك من ارتفاع $h = 5R$ كما هو موضح في الشكل. احسب سرعته عند الموضع A والموضع B.



٢ - يدفع شخص صندوق كتلته $50kg$ بقوة أفقية مقدارها F فيتحرك مسافة $5m$ بسرعة ثابتة إلى أعلى سطح مائل (أنظر الشكل). إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الصندوق والسطح يساوي 0.25، احسب الشغل الذي يبذله الشخص.

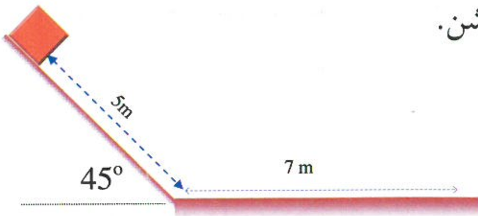


٣- كتلتان $m_1 = 4kg$ و $m_2 = 6kg$ موصولتان بحبل عديم الكتلة يمر فوق بكرة عديمة الاحتكاك كما في الشكل. إذا تركت الكتلة m_2 تتحرك من السكون، أوجد سرعة الكتلة m_1 عندما ترتطم m_2 بالأرض. ما هو أقصى ارتفاع تصل إليه m_1؟

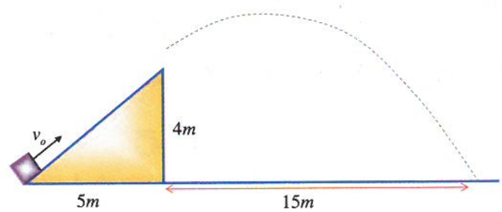


محاكاة

٤- جسم كتلته $2kg$ ينزلق من السكون على سطح مائل عديم الاحتكاك مسافة $5m$ ثم يكمل مسيره على سطح أفقي خشن ويتوقف بعد مسافة $7m$ (انظر الشكل). باستخدام نظرية حفظ الطاقة الميكانيكية، احسب معامل الاحتكاك الحركي بين الكتلة والسطح الخشن.



٥ - ينطلق جسم على سطح مائل عديم الاحتكاك بسرعة ابتدائية v_o ويصل الأرض على بعد $20m$ من نقطة الانطلاق (انظر الشكل). أوجد السرعة الابتدائية للجسم.



٦ - جسم كتلته $100kg$ يتحرك على سطح أفقي بسرعة قدرها $2m/s$. احسب القدرة المطلوبة لتحريك هذا الجسم بهذه السرعة إذا كان معامل الاحتكاك $\mu_k = 0.5$.

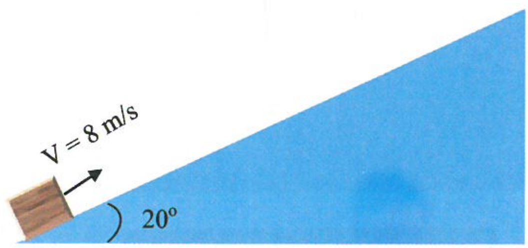
٧ - سيارة كتلتها $1200\ kg$ تتسارع بانتظام من السكون إلى $10m/s$ خلال $3s$. أوجد:

أ - الشغل المبذول على السيارة خلال هذا الزمن.

ب - القدرة المتوسطة لمحرك السيارة في الثلاث ثواني $(3s)$ الأولى.

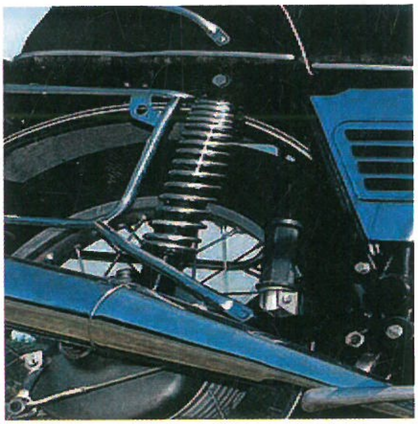
ج - القدرة اللحظية لمحرك السيارة عند $t = 2s$.

٨ - قطعة خشبية كتلتها $6\ kg$ انطلقت بسرعة ابتدائية $8m/s$ من نهاية سطح يميل بزاوية 20^o عن الأفقي وتتعرض لقوة احتكاك مقدارها $15N$.



أ - احسب المسافة التي تتحركها على السطح المائل حتى تقف.

ب - هل تتحرك القطعة الخشبية إلى أسفل ثانية؟



الوحدة السابعة

المرونة

المرونة

- لماذا يستخدم الزنبرك في مساعدات السيارات؟
- عند التأثير بقوة كبيرة على زنبرك يحدث له تشوه، ما السبب في ذلك؟
- هل يمكن تطبيق مفهوم المرونة في الإنشاءات كالجسور مثلاً؟

(٧-١) المرونة والقوى الشادّة والضاغطة:

شكل (١-٧)
سيارة يستخدم فيها زنبك لرفع جسم السيارة عن محور الإطارات

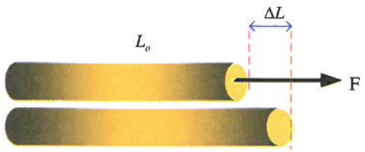
تتغير (تتشوه) المواد عند ضغطها أو سحبها، ومعظم هذه المواد تعود إلى طبيعتها بعد زوال الضغط أو السحب وتعرف هذه المواد بالمواد المرنة ويعتبر النابض من أهم الأمثلة على هذه المواد وأكثرها شيوعا في التطبيقات الفيزيائية.

وبسبب وجود القوى البينية بين ذرات العنصر والتي تكون قوية للعنصر الصلب فإننا

نحتاج إلى التأثير بقوة كبيرة F لسحب (زيادة طول أو بعد) جسم صلب وقد أثبتت التجارب أن السلوك المرن للمواد يخضع للعلاقة التالية:

$$F = Y\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)A \qquad (7-1)$$

حيث F : مقدار القوة (قوة السحب) المؤثرة عمودياً على نهاية قضيب مثلاً.



شكل (٢-٧): قوة تؤثر على قضيب

ΔL : الزيادة في طول القضيب

L_o : الطول الأصلي للقضيب.

A : مساحة المقطع العرضي (المستعرض) للقضيب.

Y: ثابت يسمى ثابت ينج للمرونة الطولية (Young's Modulus).

ويعتمد معامل ينج للمرونة الطولية على المادة (طبيعة المادة) ووحدته N/m^2.

تساؤل: ما هو بعد Y؟

ونلاحظ من العلاقة أعلاه أن F تتناسب طرديا مع الزيادة النسبية في الطول ومع مساحة المقطع العرضي للقضيب وهذا يعني أننا نحتاج إلى قوة اكبر لتغيير طول قضيب مساحة مقطعه العرضي أكبر.

وتسمى القوى التي تحدث زيادة في الطول قوى الشد (القوى الشادّة)، وقد يحدث نقصان في الطول للقضيب وذلك عندما تؤثر F في الاتجاه المعاكس، ويكون عادة Y كبيرا للمواد الصلبة (انظر ملحق-٤) مما يوضح الحاجة إلى التأثير بقوة كبيرة للحصول على مقدار صغير للتغير في طول القضيب.

مثال: أثرت قوة شادّة قدرها $900N$ على كابل (سلك) طوله $2m$ فاستطال بمقدار $0.1cm$. إذا كان معامل المرونة الطولي لمادة السلك $20x\,10^{10}\,N/m^2$، احسب نصف قطر مقطع السلك.

الحل:

بما أن مقطع السلك على شكل دائرة وليكن نصف قطرها r فإن $A=\pi r^2$:

$$F = Y\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)A$$

$$F = Y\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)(\pi r^2)$$

$$900 = 20\,x10^{10}\left(\frac{0.001}{2}\right)(\pi r^2)$$

$$9\,x10^{-6} = \pi r^2$$

$$r = 1.7x10^{-3}\,m = 1.7mm$$

مثال: أثرت قوة ضاغطة قدرها $60kN$ على طرف قضيب طوله $90cm$ ونصف قطر مقطعه $10mm$. إذا كان معامل المرونة الطولي لمادة السلك $20x\,10^{10}\,N/m^2$، احسب مقدار التغير في طول القضيب.

الحـل:

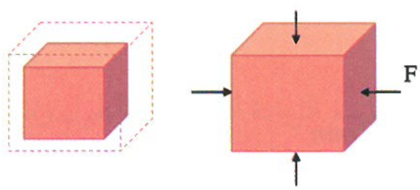
$$F = Y\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)A$$

$$F = Y\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)\left(\pi r^2\right)$$

$$60x\,10^3 = 20x\,10^{10}\left(\frac{\Delta L}{0.90}\right)\left[\pi\left(10x\,10^{-3}\right)^2\right]$$

$$\Delta L = 0.86x10^{-3}\,m = 0.86mm$$

وكما أن التأثير بقوة في بعد واحد يحدث تغيرا في الطول مثلاً فإن التأثير بقوى في ثلاثة أبعاد يحدث تغيرا في الأبعاد الثلاثة (الحجم)، وعادة تكون هذه القوى قوى ضاغطة حيث تحدث نقصاناً في الحجم وغالبا تكون معامدة لأوجه الجسم (كالمكعب مثلا)، والنسبة بين قيمة قوة مؤثرة عموديا على مساحة والمساحة يعرّف بالضغط P:



$$P = \frac{F}{A} \qquad (7-2)$$

وتكون وحدة الضغط في النظام العالمي للوحدات هي N/m^2 والتي تسمى باسكال ويرمز لها بالرمز Pa.

تساؤل: ما هو بعد P ؟

وإذا زاد الضغط على جسم (كجسم مغمور في سائل مثلاً) بمقدار ΔP فإن حجم الجسم ينقص بمقدار ΔV .

وقد أثبتت التجارب صحة العلاقة:

$$\Delta P = -B\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right) \qquad (7 - 3)$$

حيث أن V_o : الحجم الأصلي (الابتدائي) للجسم ، ويمثل $\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)$ التغير النسبي في الحجم ، كما أن الإشارة السالبة تعني أن زيادة الضغط يرافقه نقصان في الحجم.

B : ثابت يعرف بمعامل التغير الحجمي للجسم (Bulk Modulus) ووحدته N/m^2 وقيمته تعتمد على طبيعة (نوع) المادة وتكون تقريبا 10^9 أي أنها كبيرة جدا مما يعني أن زيادة كبيرة جداً في الضغط تسبب نقصان صغيراً في الحجم.

مثال: كرة المنيوم تتعرض لضغط خارجي يساوي الضغط الجوي $1.01x10^5\ N/m^2$ وهي في الهواء، ثم غمرت تحت سطح البحر حيث أصبح الضغط على سطحها $7.101x10^6\ N/m^2$. إذا كان معامل التغير الحجمي لمادة الكرة $7x10^{10}\ N/m^2$، احسب نسبة التغير في حجم الكرة.

الحل:

$$\Delta P = -B\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)$$

$$\left(7.101x10^6 - 1.01x10^5\right) = 7x10^{10}\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)$$

$$7x10^6 = 7x10^{10}\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right) = 1x10^{-4}$$

(٧-٣) قانون هوك والطاقة المختزنة في نابض (زنبرك):

وحيث أن قانون هوك يعرف بدلالة الإجهاد والانفعال فإنه لابد من التعرف على هاتين الكميتين أولا.

الإجهاد : القوة المؤثرة عموديا على وحدة المساحة ووحدته N/m^2.

الانفعال : النسبة بين التغير في الطول (الحجم) والطول (الحجم) الأصلي وليس له وحدة.

قانون هوك : ينص قانون هوك على أن الاستطالة الحاصلة في نابض x تتناسب طردياً مع القوة المؤثرة F على النابض وذلك ضمن الحد المرن للنابض، وثابت التناسب هو ثابت النابض k (معامل المرونة الطولي للنابض) والذي يعبر فيزيائياً عن درجة نعومة أو صلابة النابض.

ورياضيا فإن:

$$F = kx \qquad (7-4)$$

أو :

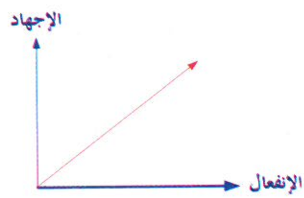
$$k = \frac{F}{x} \qquad (7-5)$$

تساؤل: ما هي وحدة قياس k وما هو بعدها ؟

وحيث أن F تشير الى الإجهاد، x: الانفعال، وان k : مقدار ثابت، فإن نص قانون هوك يكون أيضاً : "مركبات الانفعال تتناسب طردياً مع مركبات الإجهاد المناظرة"، أو

$$\frac{\text{الإجهاد}}{\text{الإنفعال}} = \text{مقدار ثابت} \qquad (٧-٦)$$

وضمن الحد المرن للنابض فإن العلاقة بين الإجهاد (على المحور الصادي) والانفعال (على المحور السيني) هي علاقة خط مستقيم ميله يساوي ثابت النابض k. وإذا لم يتجاوز الإجهاد الحد المرن لمادة النابض فإن النابض يعود إلى وضعه الأصلي حال زوال الإجهاد، ولكن ذا تجاوز الإجهاد الحد المرن لمادة النابض فإن النابض يبقى في حالة تشوهه ولا يعود إلى وضعه الأصلي إطلاقاً.



شكل (4-7): علاقة الإجهاد مع الانفعال

ولكون النابض يمتلك خاصية المرونة ووفقا لقانون هوك، فإن القوة اللازمة لزيادة طول نابض (إحداث استطالة) أو نقصانه بمقدار x تكون:

$$F = kx \qquad (7\text{-}4)$$

والنابض الذي يسلك وفقا (يخضع) لهذه العلاقة يسمى نابض مثالي.

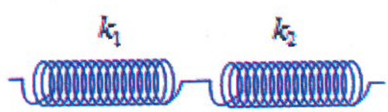
وكقوة رد فعل للقوة المؤثرة على النابض لإحداث زيادة أو نقصان في طول النابض فإن النابض، وحسب قانون نيوتن الثالث، يؤثر بقوة مساوية مقداراً ومعاكسة اتجاها وتسمى هذه القوة بالقوة المعيدة أو الارجاعية حيث أنها تؤثر دائماً لإعادة النابض إلى وضعه الأصلي (نقطة الاتزان) ويرمز لهذه القوة بالرمز F_s وتعطى بالعلاقة :

$$F_s = -kx \qquad (7-7)$$

والإشارة السالبة تبين أن القوة المعيدة للنابض تؤثر باتجاه معاكس للإزاحة.

وفي حالة وصل نابضين، ثابت النابض للأول k_1 وللثاني k_2 ، على التوالي فإنّ الثابت المكافئ لهما k يعطى بالعلاقة:

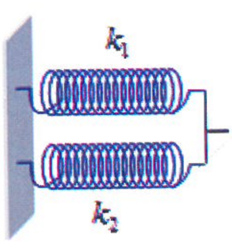
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad (7-8)$$



شكل (٥-٧): نابضان وصلا على التوازي

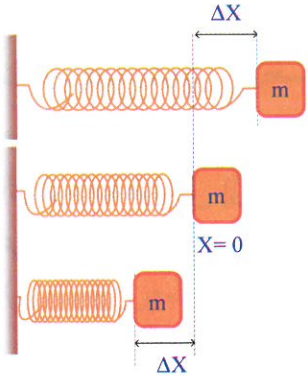
وفي حالة وصلهما على التوازي فإنّ الثابت المكافئ لهما k يعطى بالعلاقة :

$$k = k_1 + k_2 \qquad (7-9)$$



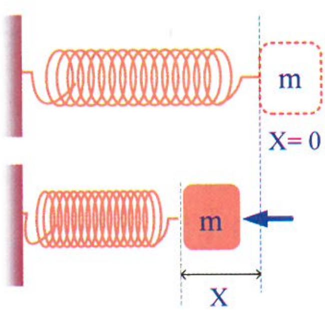
شكل (٦-٧): نابضان وصلا على التوازي

وبفرض وجود نظام فيزيائي يتكون من نابض تتصل كتلة m بإحدى طرفيه ويكون الطرف الآخر مثبت والكتلة لها حرية الحركة على سطح أفقي أملس (انظر الشكل) فإنه من الواقع (التجربة) تتحرك هذه الكتلة ذهاباً وإياباً عند إزاحتها من نقطة الاتزان ($x = 0$) ثم تركها. وتعرف هذه الحركة بالحركة التوافقية البسيطة والتي سندرسها في وقت لاحق.



شكل (٧-٧): إزاحة نابض عن موضع الاتزان

ولكون القوة التي يؤثر بها النابض على الكتلة المتصلة به قوة متغيرة (غير ثابتة) مع الإزاحة، فإنه ولحساب الشغل الذي تبذله هذه القوة دعنا نفترض أن النابض ضغط في البداية مسافة x إلى اليسار (انظر الشكل) ثم ترك فإننا نلاحظ أن قوة النابض F_s تكون إلى اليمين حيث أنها قوة معيدة تعمل على إعادة النابض إلى موضع الاتزان وأيضا فإن الإزاحة تكون إلى اليمين أي أن قوة النابض والإزاحة في نفس الاتجاه.



شكل (٨-٧): العلاقة بين اتجاه القوة المعيدة لنابض واتجاه الازاحة

ولكون قوة النابض تتغير خطياً مع الإزاحة فإنه يمكن حساب الشغل المبذول W_s بواسطة قوة النابض لإعادة الكتلة من الموضع x إلى نقطة الاتزان $x = 0$ وذلك بأخذ متوسط قوة النابض $(F_s/2)$ وضربها في الإزاحة (x)، أي أن :

$$W_s = \frac{F_s}{2} x \qquad (7-10)$$

$$W_s = \frac{kx}{2} x = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (7-11)$$

وهذا الشغل يمثل الطاقة الكامنة المختزنة في النابض والتي تمثل الشغل المبذول بواسطة القوة الخارجية التي عملت على ضغط النابض مسافة x.

وبشكل عام فإن الشغل المبذول بواسطة النابض عندما تتحرك الكتلة m المتصلة به من $x = x_i$ إلى $x = x_f$ يعطى بالعلاقة :

$$W_s = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \qquad (7-12)$$

$$W_s = U_i - U_f \qquad (7-13)$$

$$W_s = -\Delta U \qquad (7-14)$$

ويجب التأكيد على أن الطاقة الكامنة في النابض تكون صفراً في وضع اتزانه $(x = 0)$ بينما تكون $\frac{1}{2} kx^2$ عندما يكون مضغوطاً أو مسحوباً (ممدوداً، مستطيلاً) بمقدار x.

وباستخدام نظرية الشغل والطاقة :

$$W_F = \Delta KE \qquad (7-15)$$

إذا كانت القوة الوحيدة التي تبذل شغلا هي قوة النابض فإن :

$$W_{F_s} = KE_f - KE_i \qquad (7-16)$$

$$U_i - U_f = KE_f - KE_i \qquad (7-17)$$

$$\frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (7-18)$$

أو :

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 \qquad (7-19)$$

وهذه العلاقة تؤكد حفظ الطاقة الميكانيكية ($E_i = E_f$) في حالة غياب الاحتكاك (عدم وجود قوى إخماد).

ملاحظة: في العلاقة أعلاه افترضنا أن النابض مهمل الكتلة .

وإذا وجدت قوة أخرى تبذل شغلا غير النابض فإن:

$$W_{F_s} + W_F = \Delta KE \qquad (7-20)$$

وتكون

$$W_F = \left(\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2\right) - \left(\frac{1}{2}kx_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2\right) \quad (7-21)$$

أو

$$W_F = E_f - E_i \qquad (7-22)$$

حيث E_f : الطاقة الميكانيكية النهائية للنظام (نابض وكتلة والذي يعرف بالمتذبذب التوافقي البسيط).

E_i : الطاقة الميكانيكية الابتدائية للنظام.

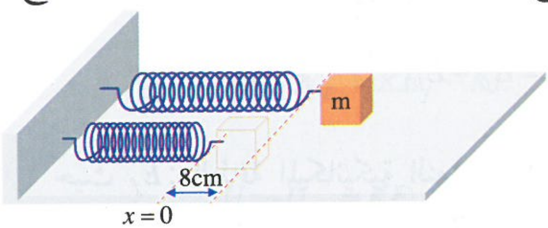
والمعادلة تعني أن الشغل الذي تبذله القوى الأخرى (غير قوة النابض) يساوي التغير في الطاقة الميكانيكية لنظام نابض- كتلة والذي يماثل حالة حركة جسم في مجال الجاذبية الأرضية والذي سبق ذكره.

ولأهمية النابض والجاذبية الأرضية في العديد من التطبيقات والمسائل الفيزيائية فإنه في حالة اعتبار كليهما تصبح العلاقة السابقة :

$$W_F = \left(\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f\right) - \left(\frac{1}{2}kx_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i\right) \quad (7-23)$$

أي أن الشغل المبذول بواسطة قوى غير الجاذبية الأرضية والنابض تساوي التغير في الطاقة الميكانيكية الكلية.

مثال: جسم كتلته $0.3kg$ مثبت في طرف زنبرك تم إزاحته مسافة $8cm$ عن موضع الاتزان كما في الشكل. إذا كان ثابت القوة للزنبرك $60\ N/m$، احسب الطاقة المختزنة في الزنبرك عند هذا الوضع. ثم احسب سرعة الجسم لحظة مروره بموضع الاتزان بعد تركه يتحرك، علماً بأن السطح الذي يتحرك عليه الجسم عديم الاحتكاك وكذلك كتلة الزنبرك مهملة.



الحل:

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

$$U=\frac{1}{2}60(0.08)^2=0.192\ \text{J}$$

لإيجاد السرعة عند مرور الجسم بموضع الاتزان نطبق قانون حفظ الطاقة الميكانيكية:

$$E_i=E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2+\frac{1}{2}kx_i^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}kx_f^2$$

$$\frac{1}{2}(0.3)(0)^2+\frac{1}{2}(60)(0.08)^2=\frac{1}{2}(0.3)v_f^2+\frac{1}{2}(60)(0)^2$$

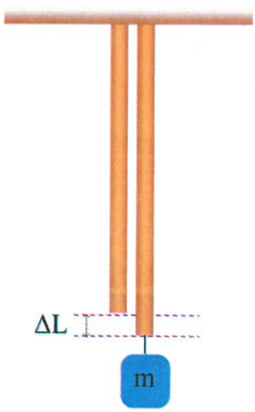
$$0+\frac{1}{2}(60)(.08)^2=\frac{1}{2}(0.3)v_f^2+0$$

$$v_f=1.13m/s$$

أمثلة محلولة

مثال١: في تجربة لقياس معامل ينج استخدم سلك نحاسي طوله $5m$ وقطره $2mm$ مثبت في سقف معمل، وفي الطرف الأخر علقت كتلة قدرها $10kg$. احسب معامل ينج إذا استطال السلك بمقدار $1.4mm$.

الحل:



$$F = Y\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)A$$

$$mg = Y\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)(\pi r^2)$$

$$10x9.8 = Y\left(\frac{1.4x10^{-3}}{5}\right)\left[\pi\left(1x10^{-3}\right)^2\right]$$

$$Y = \frac{98x5}{\left(1.4x10^{-3}\right)\left(3.14\right)\left(1x10^{-6}\right)} = \frac{490}{4.4x10^{-9}} = 11.1x10^{10}\ N/m^2$$

مثال٢: مكعب من مادة الكوارتز التي معامل تمددها الحجمي $2.7x10^{10}\ N/m^2$ غمر تحت سطح البحر على عمق معين فتغير حجمها بنسبة 0.02%. احسب الضغط على المكعب عند ذلك العمق علما بأن الضغط الجوي عند سطح البحر $1.01x10^5\ N/m^2$.

الحل:

$$\Delta P = -B\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)$$

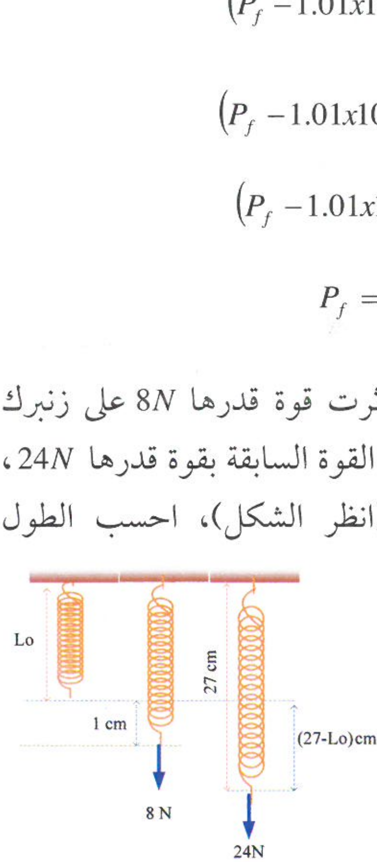
$$\left(P_f - 1.01x10^5\right) = -2.7x10^{10}\left(-\frac{0.02}{100}\right)$$

$$\left(P_f - 1.01x10^5\right) = -2.7x10^{10}\left(-2x10^{-4}\right)$$

$$\left(P_f - 1.01x10^5\right) = 5.4x10^6 = 54x10^5$$

$$P_f = 55.01x10^5\ N/m^2$$

مثال٣: في تجربة للتحقق من قانون هوك أثرت قوة قدرها $8N$ على زنبرك فاستطال بمقدار $1cm$، ثم استبدلت القوة السابقة بقوة قدرها $24N$، فكان الطول الكلي للزنبرك $27cm$ (انظر الشكل)، احسب الطول الأصلي للزنبرك.



الحل:

نحسب ثابت القوة للنابض باستخدام قانون هوك :

$$F = kx$$

$$8 = k(0.01)$$

$$k = 800\ N/m^2$$

عند التأثير بقوة قدرها $24N$ أصبح الطول الكلي $27cm$ وبفرض أن الطول الأصلي للزنبرك L_o تصبح الاستطالة في هذه الحالة:

$$x = (0.27 - L_o)m$$

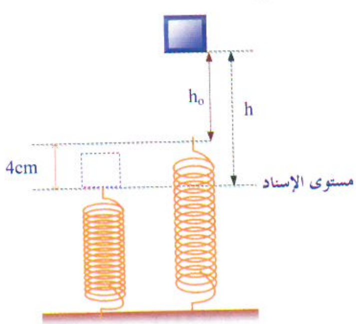
ثم نطبق قانون هوك في هذه الحالة :

$$F = kx$$

$$24 = 800(0.27 - L_o)$$

$$L_o = 0.27 - \left(\frac{24}{800}\right) = 0.27 - 0.03 = 0.24m = 24cm$$

مثال٤: سقط جسم كتلته $0.5kg$ سقوطاً حراً من ارتفاع h_o عن نهاية زنبرك $(k = 10^4\ N/m)$ مثبت رأسياً فكان أقصى إزاحة انضغطها الزنبرك هي $4cm$ (انظر الشكل). احسب الارتفاع h_o الذي سقط منه الجسم.



الحل:

نفترض أن ارتفاع الجسم عن مستوى نهاية الزنبرك بعد أقصى انضغاط هو h وكذلك بما أن الإزاحة رأسية نفترض أن الزنبرك ينضغط أقصى إزاحة $4cm$ ثم نطبق قانون حفظ الطاقة:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f + \frac{1}{2}kx_f^2$$

بالنسبة لطاقة وضع الجاذبية نفترض أن مستوى الإسناد هو نهاية الزنبرك بعدما ينضغط $(h_f = 0)$، وعليه يكون:

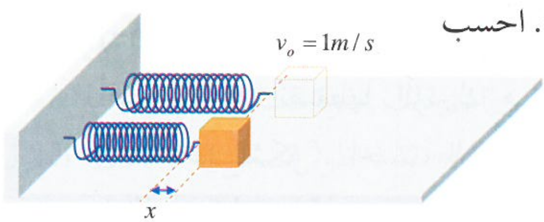
$$0 + (0.5)(9.8)h + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}x10^4(0.04)^2$$

$$h = 1.63m$$

لكن:
$$1.63 = h_o + 0.04$$

$$h_o = 1.59 \text{ m}$$

مثال٥: جسم كتلته $0.8kg$ يتحرك بسرعة ثابتة قدرها $1m/s$ على سطح عديم الاحتكاك ثم يصطدم بزنبرك كتلته مهملة وثابت القوة له $500\,N/m$ فيضغطه (انظر الشكل). احسب



الحل:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}(0.8)(1)^2 = \frac{1}{2}(500)x^2$$

$$x^2 = \frac{0.8}{500}$$

أو

$$\text{x} = 0.04 \text{ m}$$

تساؤل: حل المثال السابق إذا كان السطح خشناً ومعامل احتكاكه الحركي 0.2.

مثـال٦: جسم كتلته $0.4kg$ مثبت بطرف زنبرك ثابت القوة له $1000\,N/m$ ويضغطه $6cm$. إذا ترك الجسم ليتحرك على مسار أفقي ويكمل مسيره على سطح مائل، أحسب أقصى مسافة بتحركها على السطح المائل وذلك بإهمال الاحتكاك خلال الحركة.

الحل:

نفرض أن أقصى مسافة يتحركها الجسم على السطح المائل هي d وأن h تمثل أقصى ارتفاع للجسم عن المستوى الأفقي (انظر الشكل).

باستخدام قانون حفظ الطاقة الميكانيكية :

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgd(\sin 30)$$

$$\frac{1}{2}(1000)(0.06)^2 = (0.4)(9.8)d(\sin 30)$$

$$d = 0.92m$$

أسئلة وتمارين

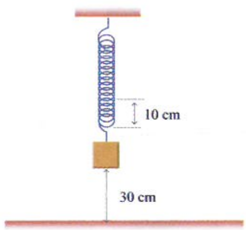
أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١- زنبرك مثبت في وضع أفقي وفي احد أطرافه كتلة $2kg$ وتتغير القوة المعيدة له مع الإزاحة x وفق المعادلة $F = 100x$. ما هو ثابت القوة للزنبرك؟			
أ- $200\,N/m$	ب- $100\,N/m$	ج- $50\,N/m$	د- $980\,N/m$
٢- في تجربة قياس معامل ينج لسلك من النحاس، عند التأثير بقوة معينة استطال السلك بمقدار d . إذا أثرت نفس القوة على سلك آخر من نفس المادة ولكن قطر مقطعه ثلث قطر مقطع السلك الأول فإنه يستطيل بمقدار:			
أ- d	ب- $2d$	ج- $3d$	د- $9d$
٣- إذا تغير الضغط على كرة معدنية بمقدار $5x10^5\ Pa$ فتغير حجمها بنسبة 0.005% ، فإن معامل التمدد الحجمي لمادة الكرة:			
أ- $1x10^{10}\ N/m^2$	ب- $5x10^{10}\ N/m^2$	ج- $25x10^{10}\ N/m^2$	د- $1x10^{8}\ N/m^2$
٤- جسم كتلته $0.5kg$ يضغط زنبرك ثابت القوة له $50\,N/m$ مسافة $4cm$ عن موضع الاتزان على سطح عديم الاحتكاك. إذا افلت الجسم، فإن سرعته لحظة مروره في موضع الاتزان تكون:			
أ- $0.16m/s$	ب- $0.5m/s$	ج- $0.4m/s$	د- $400m/s$
٥- إذا كانت إزاحة زنبرك عن موضع الاتزان x_o ، فإنه لكي تتضاعف الطاقة الكامنة في الزنبرك فإن إزاحته تصبح:			
أ- $2x_o$	ب- $4x_o$	ج- $\sqrt{2}\,x_o$	د- $x_o/\sqrt{2}$

ثانيا:

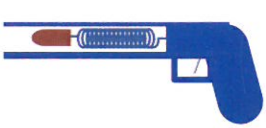
١- سلك ألمنيوم طوله $28m$ وقطره $2mm$. احسب القوة اللازمة لكي يستطيل السلك بمقدار $5mm$ إذا كان معامل ينج له $7.5x10^{10}\ N/m^2$.

٢- كمية زيت في اسطوانة رافعة هيدروليك حجمها $6000cm^3$ تعرضت لضغط فنقص حجمها $2cm^3$. احسب مقدار الضغط المؤثر، علماً بأنّ معامل المرونة الحجمي للزيت يساوي $1.7x10^9\ N/m^2$.



٣- ما هي الطاقة الكلية لنظام كتلة – زنبرك في الشكل علماً بأن الكتلة ($200\ gm$) عند أقصى إزاحة لها عن موضع الاتزان، وعلى ارتفاع $30cm$ من مستوى الإسناد؟

٤- خرطوش صيد مثبت رأسياً كما في الشكل بحيث تكون رصاصة الصيد التي كتلتها $20g$ ضاغطة الزنبرك $6cm$ عن موضع اتزانه. إذا كان أقصى ارتفاع تصل إليه الرصاصة إذا أطلقت رأسياً هو $12m$، احسب ثابت الزنبرك.



٥- رصاصة كتلتها $10gm$ تضغط زنبرك خرطوش صيد($k = 10^4\ N/m$) مسافة مقدارها $4cm$ كما هو موضح في الشكل.

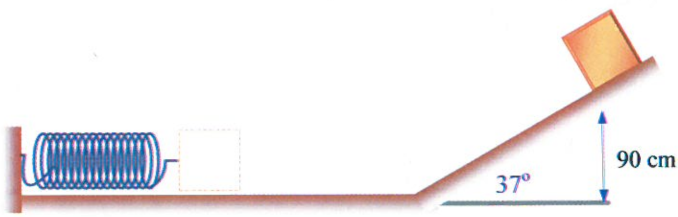
أ) احسب سرعة الرصاصة لحظة انفلاتها من النابض.
ب) حدّد موقع الرصاصة بعد ثانيتين من انفلاتها من النابض.

٦- جسم كتلته $0.8kg$ يتحرك على سطح خشن معامل احتكاكه الحركي 0.2 ثم يصطدم بزنبرك كتلته مهملة وثابت القوة له $500\,N/m^2$. إذا كانت سرعة الجسم لحظة اصطدامه بالزنبرك $4\,m/s$ ، احسب أقصى إزاحة ينضغطها الزنبرك.

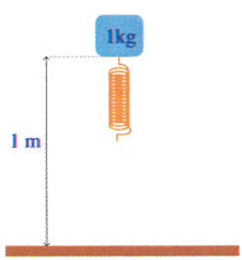
٧- أثبت صحة العلاقتين (٨-٧) ، (٩-٧) في حالة وصل نابضين على التوالي وعلى التوازي.

أسئلة تحدي

١ - جسم كتلته $2kg$ ينزلق من السكون على سطح خشن ثم يكمل مسيره على سطح أفقي عديم الاحتكاك ويصطدم بزنبرك ثابت القوة له $4x10^3\ N/m$.



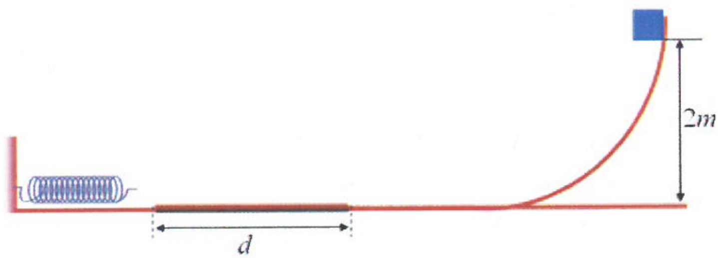
ويضغطه بمقدار $8cm$. باستخدام نظرية حفظ الطاقة الميكانيكية، احسب معامل احتكاك السطح الخشن.



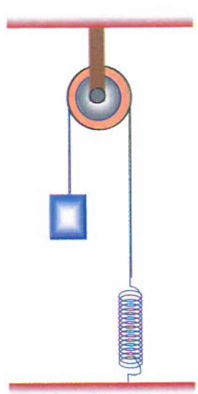
٢ - جسم كتلته $1kg$ مثبت به زنبرك طوله $30cm$ كتلته مهملة وثابت القوة له $4704 N/m$ سقطا سقوطاً حراً. احسب أقصى تغير في طول الزنبرك بعدما يسقط.

٣- ينزلق جسم كتلته $4kg$ من السكون على سطح مائل عديم الاحتكاك مثبت في نهايته زنبرك ثابت القوة له $8x10^3\ N/m$ (انظر الشكل). إذا كانت المسافة التي يقطعها على السطح المائل حتى يصطدم بالزنبرك ويضغطه إلى أن يتوقف عن الحركة تماماً $20cm$، احسب التغير في طول الزنبرك ثم احسب سرعة الجسم في اللحظة التي تسبق اصطدامه بالزنبرك.

٤ - جسم كتلته $8kg$ ينزلق من السكون على مسار عديم الاحتكاك ما عدا جزء منه طوله d معامل احتكاكه الحركي 0.3 ثم يصطدم بزنبرك ثابت القوة له $3x10^4\ N/m$ ويضغطه بمقدار $10cm$. باستخدام نظرية حفظ الطاقة الميكانيكية، احسب المسافة d.



٥ - في الشكل المجاور إذا كانت كتلة الجسم المعلق $5kg$ وارتفاعه $1m$ وترك ليتحرك للأسفل واستقر بعد أن شد الزنبرك عن وضع اتزانه مقدار $0.1m$. احسب ثابت القوة للزنبرك.



٦ - إذا لزم شغل قدره $4J$ لاستطالة نابض مسافة $8cm$ من موضع اتزانه، احسب الشغل الإضافي اللازم لزيادة استطالته $8cm$ أخرى.

الوحدة الثامنة

كمية الحركة

كمية الحركة

- متى يكون لأي جسم كمية حركة ومتى تكون أكبر ما يمكن؟
- عند إطلاق عربة المدفع قذيفة إلى الأمام ما ذا يحدث لعربة المدفع نفسها؟
- ما هو مبدأ لعبة البليياردو؟

(٨-١) كمية الحركة الخطية (كمية الحركة، الزخم الخطي) والدفع والقوى:

تعرّف كمية الحركة الخطية $\vec{p}$ لجسم كتلته m وسرعته $\vec{v}$ على الصورة :

$$\vec{P} = m\vec{v} \qquad (8 - 1)$$

وتكون وحدة كمية الحركة في النظام العالمي هي $kg\ m/s$ وبعدها $M\ L/T$ ومن التعريف نلاحظ أيضا أن $\vec{p}$ كمية متجهة ويكون اتجاهها في نفس اتجاه $\vec{v}$.

شكل (١-٨):صورة سيارة صغيرة تصطدم في شاحنة وتلتحم معها

وبصيغة المركبات (في بعدين) يكون :

$$P_x = mv_x \qquad (8-2)$$

$$P_y = mv_y \qquad (8-3)$$

كما أن:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (8-4)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} \qquad (8-5)$$

وهذه صيغة أخرى لقانون نيوتن الثاني والتي تنص على أن "المعدل الزمني للتغير في كمية الحركة لجسم ما تساوي محصلة القوى المؤثرة على ذلك الجسم".

فإذا كانت $\vec{F} = 0$ كما هو الحال للجسم المعزول أو النظام المغلق فإن كمية الحركة $\vec{p}$ تكون ثابتة.

أيضا وباستخدام المعادلة أعلاه فإن :

$$d\vec{P} = \vec{F}dt \qquad (8-7)$$

وبإجراء التكامل للطرفين :

$$\int_{P_i}^{P_f} d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \qquad (8-8)$$

فإنّ الطرف الأيمن الذي يمثل تأثير قوة على جسم ما لفترة زمنية قصيرة ($\Delta t = t_f - t_i$) يسمى دفع القوة أو الدفع (Impulse) ويرمز له بالرمز $\vec{I}$ وهو كمية متجهة ويكون :

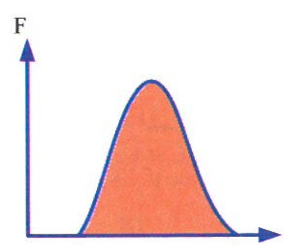
$$\vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \Delta\vec{P} \qquad (8-9)$$

أي أن الدفع يساوي التغير في كمية الحركة وتعرف هذه العلاقة بنظرية الدفع - كمية الحركة. ويكون اتجاه الدفع في نفس اتجاه التغير في كمية الحركة،كما أن وحدة قياس الدفع هي نفسها وحدة كمية الحركة.

ولكون التعريف الأساسي للدفع:

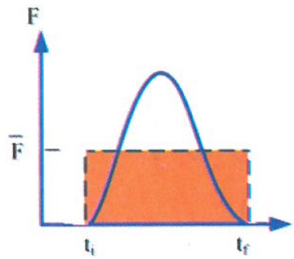
$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \qquad (8-10)$$

فإنه يمكن أيضا حساب قيمة الدفع والتي تساوي المساحة تحت منحنى القوة - الزمن، أي أن التكامل رياضياً يمثل مساحة بيانياً.



شكل (٢-٨): العلاقة بين القوة والزمن

وحيث أن القوة تتغير مع الزمن فمن الملائم تعريف القوة المتوسطة $\bar{\vec{F}}$ التي نتصور (نفترض) أنها ثابتة وتعطي نفس الدفع للجسم الذي تؤثر عليه للفترة الزمنية Δt وعليه فإن :



شكل (٣-٨): علاقة متوسط القوة مع الزمن لحساب الدفع

$$\vec{I} = \bar{\vec{F}}\Delta t \qquad (8-11)$$

وعليه نحصل على

$$\vec{I} = \bar{\vec{F}}\Delta t = \Delta\vec{P} \qquad (8-12)$$

وهذا التعريف يؤكد أن اتجاه $\vec{I}$ في نفس اتجاه $\Delta\vec{P}$ والذي هو أيضا في اتجاه القوة المتوسطة المؤثرة $\bar{\vec{F}}$ وتكون وحدة الدفع أيضاً $N.s$.

ويجدر التنويه إلى أنه عادة يصعب قياس القوة المتوسطة خلال التصادم وعادة نجد $\Delta\vec{P}$ وبمعرفة Δt يمكن حساب $\bar{\vec{F}}$.

ملاحظة : تجنباً للتكاملات الرياضية فإنه بمكن أيضاً التوصل إلى نظرية كمية الحركة - الدفع باستخدام قانون الحركة المستقيمة :

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \qquad (8-13)$$

وبضرب المعادلة بالكتلة m يكون :

$$m\vec{v}_f = m\vec{v}_i + m\vec{a}t \qquad (8-14)$$

وبتعويض $\vec{F} = m\vec{a}$ (حسب قانون نيوتن الثاني)، $t = \Delta t$ (أي الفترة الزمنية التي تتغير بها السرعة من $\vec{v}_i$ إلى $\vec{v}_f$) فإن :

$$m\vec{v}_f = m\vec{v}_i + \vec{F}\Delta t \qquad (8-15)$$

أو

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i \qquad (8-16)$$

أي أنّ

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} \qquad (8-17)$$

مثال: أثرت قوة على جسم كتلته $5kg$ يتحرك أفقياً لمدة $3s$ فأحدثت تغيراً في كمية حركته بمقدار $30kg\ m/s$. احسب مقدار القوة المؤثرة عليه، ثم احسب تسارع الجسم.

الحل:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P}$$

$$\vec{F}(3) = 30$$

$$\vec{F} = \frac{30}{3} = 10N$$

لحساب التسارع :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$10 = 5a$$

$$a = 2m/s^2$$

مثال: أثرت قوة على جسم كتلته $10kg$ يتحرك أفقياً لمدة $4s$ حيث غيّرت سرعته من $15m/s$ الى $25m/s$. باستخدام نظرية الدفع - كمية الحركة، أوجد مقدار القوة.

الحل:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P}$$

$$F\Delta t = mv_f - mv_i$$

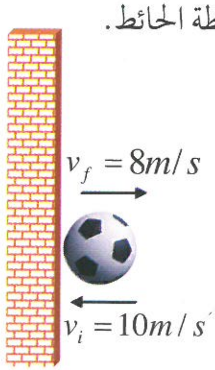
$$F(4) = 10(25) - 10(15)$$

$$F(4) = 100$$

$$F = 25N$$

تساؤل: في المثال السابق احسب الشغل المبذول بواسطة القوة، ثم احسب القدرة.

مثال: قذفت كرة كتلتها $200g$ أفقياً باتجاه حائط حيث كانت سرعتها قبل ارتطامها بالحائط مباشرة $10m/s$، وارتدت بسرعة $8m/s$. إذا لامست الكرة الحائط لمدة $0.18s$، احسب متوسط القوة المؤثرة على الكرة بواسطة الحائط.



الحل:

$$\vec{I} = \Delta\vec{P}$$

$$\vec{I} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

$$I = 0.2(8) - 0.2(-10) = 3.6kg\ m/s$$

$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{3.6}{0.18} = 20N$$

(٨-٢) مبدأ حفظ كمية الحركة:

في حين أن نظرية الشغل والطاقة تقود إلى قانون حفظ الطاقة الميكانيكية فإن نظرية الدفع وكمية الحركة تقود إلى قانون حفظ كمية الحركة. وباستخدام نظرية الدفع – كمية الحركة :

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P} \qquad (8\text{-}12)$$

إذا كانت $\bar{\vec{F}} = 0$ أي أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على النظام تساوي صفر، فإن :

$$\Delta\vec{P} = 0 \qquad (8\text{-}18)$$

$$\vec{P}_f - \vec{P}_i = 0 \qquad (8\text{-}19)$$

أي أن:

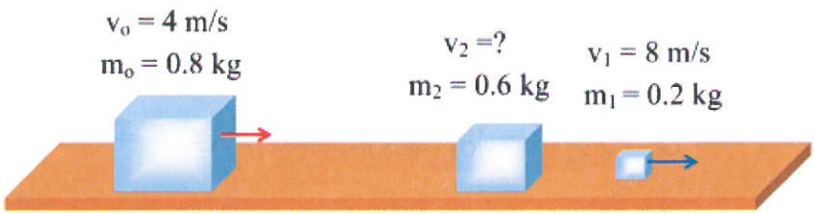
$$\vec{P}_f = \vec{P}_i \qquad (8\text{-}20)$$

ويعرف هذا بمبدأ حفظ (ثبوت) كمية الحركة، أي أن كمية الحركة لجسيم (أو نظام) لا تتغير مع الزمن (تبقى ثابتة) إذا كانت محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه تساوي صفراً.

مثال: مكعب ثلج كتلته $0.8kg$ يتحرك أفقيا (باتجاه محور السينات الموجب) على سطح عديم الاحتكاك بسرعة قدرها $4m/s$. إذا انقسم المكعب الى جزئيين الأول كتلته $0.2kg$ تحرك بسرعة $8m/s$ في نفس الاتجاه، أوجد سرعة الجزء الآخر.

الحل:

نفرض أن كتلة مكعب الثلج الابتدائية m_o وسرعته v_o وأنه بعد الانقسام أصبح الجزء m_1 يتحرك بسرعة v_1 والجزء m_2 يتحرك بسرعة v_2 (كما يوضح الشكل) فإن :



$$\vec{P}_f = \vec{P}_i$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_o\vec{v}_o$$

$$0.2(8) + 0.6v_2 = 0.8(4)$$

$$\vec{v}_2 = 2.67 m/s$$

والإشارة موجبة تعني أن الكتلة m_2 تحركت بنفس الاتجاه (محور السينات الموجب).

مثال: مدفع كتلته $3x10^3 kg$ يطلق قذيفة كتلتها $10kg$ بسرعة $200m/s$ أفقياً. احسب سرعة ارتداد المدفع للخلف لحظة إطلاقه القذيفة.

الحل:

نفترض أن كتلة المدفع m_1 و كتلة القذيفة m_2 ولكون المدفع والقذيفة في البداية ساكنان فإن كمية الحركة الابتدائية صفر:

$$\vec{P}_i = 0$$

$$\vec{P}_f = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$\vec{P}_f = 3x10^3\,\vec{v}_{1f} + 10(200)$$

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i$$

$$3x10^3\,\vec{v}_{1f} + 10(200) = 0$$

$$\vec{v}_{1f} = -0.67 m/s$$

والإشارة السالبة تعني أن سرعة ارتداد المدفع بعكس اتجاه سرعة انطلاق القذيفة.

(٨-٣) التصادمات:

تعتبر التصادمات وعلى اختلاف أنواعها من أهم التطبيقات الفيزيائية التي يستخدم بها قانون حفظ كمية الحركة (كمية الحركة الكلية بعد التصادم تساوي كمية الحركة الكلية قبل التصادم)، لذلك سنتعرف على أنواع هذه التصادمات وكيفية استخدام قانون حفظ كمية الحركة للحصول على معلومات فيزيائية هامة.

أنواع التصادمات:

- التصادم المرن (التصادم تام المرونة):

هو التصادم الذي تكون فيه طاقة الحركة الكلية محفوظة (طاقة الحركة الكلية بعد التصادم تساوي طاقة الحركة الكلية قبل التصادم).

- التصادم غير المرن:

هو التصادم الذي لا تكون فيه طاقة الحركة الكلية محفوظة. ومن التصادمات غير المرنة الشائعة والأكثر وضوحاً التصادم عديم المرونة حيث يلتحم الجسمان المتصادمان ليصبحا جسماً واحداً بعد التصادم.

وسنركز أولاً على تصادم جسيمين (كتلتين) يشكلان نظاما معزولا وفي بعد واحد (تصادماً رأسيا)، ولكون النظام معزولا فإنه يمكن استخدام قانون حفظ كمية الحركة. وعليه وفي حالة التصادم المرن، يمكن استخدام المعادلتين الآتيتين :

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \qquad (8-21)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad (8-21)$$

حيث m_1، m_2 كتلتا الجسيمين المتصادمين، $\vec{v}_{1_i}$، $\vec{v}_{2_i}$ سرعتا الجسيمين المتصادمين قبل التصادم مباشرة، $\vec{v}_{1_f}$، $\vec{v}_{2_f}$ سرعتا الجسيمين بعد التصادم مباشرة. ويجب الانتباه إلى أن السرعات هي كميات متجهة لذا يؤخذ، اصطلاحاً، الاتجاه السيني الموجب موجباً في السرعة والسالب سالباً.

وفي حالة التصادم عديم المرونة فإنه يمكن استخدام علاقة حفظ كمية الحركة:

$$m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i} = (m_1 + m_2)\vec{v} \qquad (8-21)$$

حيث $\vec{v}$ سرعة الكتلتان معا (يصبح الجسمان جسماً واحداً) بعد التصادم مباشرة، في حين أن طاقة الحركة تكون غير محفوظة، وللتصادم غير المرن فإنه يمكن حساب مقدار التغير (النقصان) في طاقة الحركة ΔKE :

$$\Delta KE = KE_i - KE_f \qquad (8-22)$$

أيضا في التصادمات إذا حصل أن تحرك جسمان باتجاه بعضهما ثم ارتدا بعد تصادمهما رأسيا فإن النسبة بين سرعتيهما النسبية بعد التصادم وسرعتيهما النسبية قبل التصادم تعرف بمعامل الارتداد لهما ويرمز له بالرمز ε، والتي لها أهمية خاصة في التصادمات وتطبيقاتها، وتكون على الصورة :

$$\varepsilon = -\frac{(v_{1f} - v_{2f})}{(v_{1i} - v_{2i})} \qquad (8-23)$$

وإذا اصطدم جسم خفيف كالكرة بجسم ثقيل ساكن كالأرض تصادما رأسيا فإن الجسم الخفيف يرتد ويبقى الجسم الثقيل ساكنا، أي أن $v_{2f} = v_{2i} = 0$

وعليه يكون:

$$\varepsilon = -\frac{v_{1f}}{v_{1i}} \qquad (8-24)$$

والإشارة السالبة توضح أن اتجاه السرعة (السرعة النسبية بعد التصادم) يكون عكس اتجاه السرعة (السرعة النسبية) قبل التصادم.

كما انه يمكن ملاحظة أن ε ليس لها وحدة.

سؤال: أثبت أن ε تساوي 1 في حالة التصادم تام المرونة.

ملاحظة: عادة تكون $\varepsilon < 1$ لأن معظم التصادمات تكون بين تصادم تام المرونة وعديم المرونة حيث يحدث فقدان للطاقة يظهر على شكل طاقة حرارية.

سؤال :في التصادم تام المرونة ، أثبت أن :

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \qquad (8-25)$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \qquad (8-26)$$

ملاحظات:

- إذا كانت $m_1 = m_2$ (تصادم أجسام متماثلة) فإن $v_{1f} = v_{2i}$ و $v_{2f} = v_{1i}$ (أي أن الكتل تتبادل السرع).

- إذا كانت m_2 ساكنة (أي $v_{2i} = 0$) كما هو الحال في حالة التصادمات النووية والتي تعتبر من أهم التصادمات تامة المرونة فإن :

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad (8-27)$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad (8-28)$$

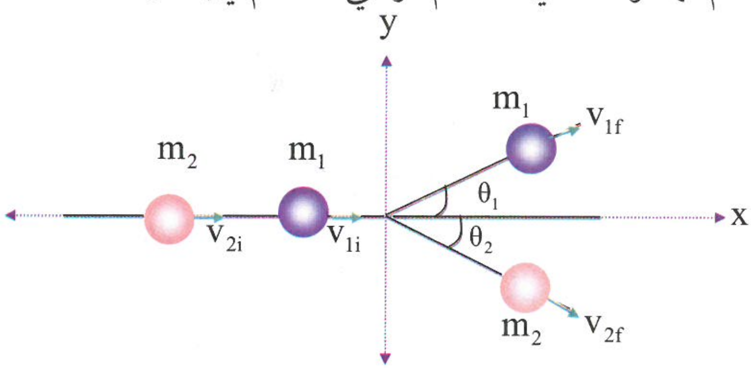
- إذا كانت $m_1 >> m_2$ (تصادم ذرة يورانيوم مع ذرة هيدروجين) فإن :

$$v_{1f} = v_{1i} \qquad (8-29)$$

$$v_{2f} \approx 2v_{1i} \qquad (8-30)$$

التصادمات في بعدين :

معظم التصادمات تحدث في بعدين حيث تصنع كل كتلة مع الإحداثي السيني الموجب زاوية بعد التصادم ولا تتحرك الكتلتان على الإحداثي السيني بعد التصادم كما هو الحال في التصادم الرأسي (تصادم في بعد واحد).



شكل (٤-٨): تصادم جسمين في بعدين

وفي مثل هذه التصادمات (في بعدين) نطبق قانون حفظ كمية الحركة لنظام معزول في صيغة المركبات :

حفظ كمية الحركة في الاتجاه السيني:

$$\left(\vec{P}_i\right)_x = \left(\vec{P}_f\right)_x \qquad (8-31)$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \qquad (8-32)$$

حفظ كمية الحركة في الاتجاه الصادي:

$$\left(\vec{P}_i\right)_y = \left(\vec{P}_f\right)_y \qquad (8-33)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \qquad (8-34)$$

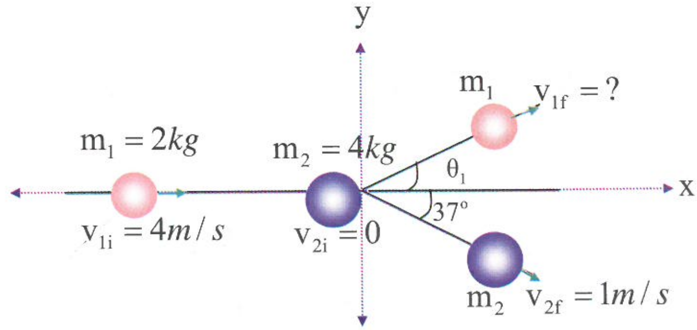
وإذا كان التصادم مرناً فإنه يمكن استخدام قانون حفظ طاقة الحركة :

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (8-35)$$

تساؤل: لماذا لم نهتم للمركبات السينية والصادية حين حساب طاقة الحركة ؟

ويمكن حل المعادلات الثلاث لإيجاد ثلاثة مجاهيل أو أقل.

مثال١: كرة كتلتها $2kg$ تتحرك بسرعة $4m/s$ باتجاه محور السينات الموجب فتصطدم بكرة أخرى ساكنة كتلتها $4kg$. إذا تحركت الكرة الثانية بعد التصادم بسرعة $1m/s$ وبزاوية 37^o عن مسارها كما في الشكل، احسب سرعة الكرة الأولى واتجاهها بعد التصادم.



الحل:

نطبق مبدأ حفظ كمية الحركة في الاتجاه السيني: $\left(\vec{P}_i\right)_x = \left(\vec{P}_f\right)_x$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

$$2(4) + 4(0) = 2v_{1f} \cos\theta_1 + 4(1)\cos 37^o$$

$$8 = 2v_{1f} \cos\theta_1 + 4(1)(0.8)$$

$$v_{1f} \cos\theta_1 = 2.4 \quad ....(1)$$

وكذلك حفظ كمية الحركة في الاتجاه الصادي: $\left(\vec{P}_i\right)_y = \left(\vec{P}_f\right)_y$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2$$

$$0 = 2v_{1f} \sin\theta_1 - 4(1)\sin 37^o$$

$$0 = 2v_{1f} \sin\theta_1 - 4(1)(0.6)$$

$$v_{1f} \sin\theta_1 = 1.2 \quad ....(2)$$

نقوم بحل المعادلتين (1) و(2) لحساب θ_1 و v_{1f} فنقسم المعادلة (2) على (1) فنحصل على:

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}=\frac{1.2}{2.4} \Rightarrow \tan\theta_1=0.5$$

$$\theta_1=\tan^{-1}(0.5)=26.56^o$$

ثم نعوض في إحدى المعادلتين لحساب v_{1f}. فمثلا بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على :

$$v_{1f}=\frac{2.4}{\cos\theta_1}=\frac{2.4}{\cos 26.56}=2.68m/s$$

(٨-٤) حركة جسم متغير الكتلة (إطلاق الصواريخ):

كما نعلم فان القوة المحركة لسيارة، أو وراء حركة سيارة، هي قوة الاحتكاك وكذلك لقارب أو قاطرة، ولكن عملية إطلاق (تسيير، دفع) الصواريخ تختلف حيث تعتمد على قانون حفظ كمية الحركة لنظام يتكون من صاروخ ووقود يستنفذ (يقذف).

شكل (٦-٨): حركة الصاروخ

وباستخدام مفهوم التصادمات فانه يمكن اعتبار عملية إطلاق صاروخ تصادم عديم المرونة عكسي حيث أن الجسم الواحد يصبح جسمان وتزداد طاقة الحركة لهذا التصادم عديم المرونة العكسي وذلك على حساب الطاقة الداخلية للنظام.

وبتطبيق قانون حفظ كمية الحركة:

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e) \qquad (8-35)$$

حيث M : كتلة الصاروخ عند أي زمن t.

Δm : كتلة الوقود.

v : سرعة الصاروخ.

Δv : الزيادة في سرعة الصاروخ بسبب اندفاع الوقود الى الخارج ونقصان الكتلة الكلية.

v_e : سرعة الوقود المقذوف.

أو :

$$M\,\Delta v = (\Delta m)v_e \qquad (8-37)$$

وعندما تقترب Δt من الصفر فان $\Delta m = dm$ ، $\Delta v = dv$ ، أيضا فان الزيادة في الوقود المحروق dm يمثل نقصانا في الكتلة الكلية للصاروخ أي أن:

$$dm = -dM \qquad (8-36)$$

وعليه فان المعادلة (٣٧-٨) تصبح :

$$Mdv = -v_e dM \qquad (8-37)$$

أو

$$dv = -v_e \frac{dM}{M} \qquad (8-38)$$

وبمكاملة الطرفين :

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \qquad (8-39)$$

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \qquad (8-40)$$

حيث M_i :الكتلة الابتدائية الكلية (كتلة الصاروخ + كتلة الوقود).

M_f : الكتلة النهائية الكلية (كتلة الصاروخ + الكتلة المتبقية من الوقود).

ملاحظة: يمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام نظرية الدفع-كمية الحركة الخطية.

وتوضح المعادلة أعلاه، والتي تمثل عملية إطلاق الصواريخ، أن الزيادة في سرعة الصاروخ تتناسب طرديا مع سرعة الوقود المقذوف (المستنـزف).

كما أنها تتناسب مع اللوغاريتم الطبيعي للنسبة بين الكتلة الابتدائية الكلية والكتلة النهائية الكلية والتي تعني أن الصاروخ يجب أن يحمل أقصى ما يستطيع من الوقود.

أيضاً تؤثر على الصاروخ قوة دفع ناجمة عن الوقود المقذوف من الصاروخ وتعطى قيمتها بالعلاقة:

$$F = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| \qquad (8-41)$$

مثـال: يتحرك صاروخ في الفضاء الحر (خارج مجال الجاذبية الأرضية) بسرعة $3x\,10^3 m/s$. إذا أطلق (قذف) الوقود من الصاروخ بسرعة $5x\,10^3 m/s$ باتجاه معاكس للصاروخ وبالنسبة له، احسب مقدار سرعة الصاروخ عندما تصبح كتلته نصف كتلته قبل إطلاق الوقود.

الحل:

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$v_f = 3x\,10^3 + 5x\,10^3 \ln\left(\frac{M_i}{\frac{1}{2}M_i}\right)$$

$$v_f = 3x\,10^3 + 5x\,10^3 \ln 2$$

$$v_f = 6.47x\,10^3 m/s$$

تساؤل: في المثال السابق، ما هي قوة الدفع للصاروخ الناجمة عن احتراق الوقود بمعدل $50kg/s$.

أمثلة محلولة

مثال١: في الصورة المجاورة كانت السيارة الصغيرة التي كتلتها $1000kg$ تتحرك بسرعة $20m/s$ في اللحظة التي تسبق اصطدامها بشاحنة متوقفة وكتلتها $4000kg$. إذا التحمت السيارتان معاً وتحركتا، احسب سرعتهما بعد التصادم مباشرة.

الحل:

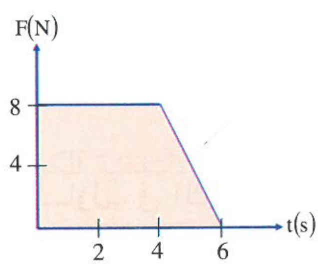
نفرض أن كتلة السيارة الصغيرة m_1 وسرعتها الابتدائية v_{1i} وأن الشاحنة كتلتها m_2 وأن السرعة النهائية للسيارتين معاً بعد التصادم v_f، و بتطبيق مبدأ حفظ كمية الحركة لهذا التصادم عديم المرونة:

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=(m_1+m_2)v_f$$

$$1000(20)+0=(1000+4000)v_f$$

$$v_f=4m/s$$

مثال٢: جسم كتلته $2kg$ تؤثر عليه قوة متغيرة مع الزمن وفق الشكل المجاور. احسب الدفع المؤثر على الجسم ثم احسب سرعته عند $t=6s$ إذا كانت سرعته الابتدائية $5m/s$.



الحل:

بما أن القوة متغيرة مع الزمن فإن الدفع يكون عبارة عن المساحة تحت منحنى القوة – زمن:

$$I = (4x8) + \frac{1}{2}(6-4)8 = 40kg\, m/s$$

لكن:

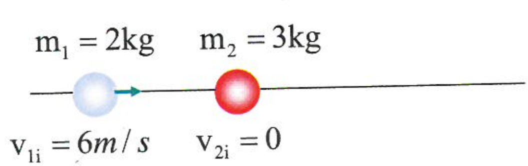
$$\bar{I} = m\bar{v}_f - m\bar{v}_i$$

$$40 = 2\bar{v}_f - 2(5)$$

$$\bar{v}_f = 25m/s$$

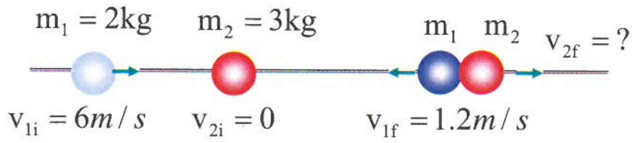
تساؤل: في المثال السابق، احسب سرعة الجسم عند $t = 4s$.

مثال٣: كرة كتلتها $2kg$ تتحرك بسرعة $6m/s$ باتجاه كرة أخرى ساكنة كتلتها $3kg$ (انظر الشكل) وتصطدم بها تصادما مرناً رأساً برأس head on، فترتد الكرة الأولى على نفس المحور بسرعة قدرها $1.2m/s$. أوجد سرعة الكرة الثانية بعد التصادم.



الحل:

باستخدام معادلة حفظ كمية الحركة على خط مستقيم :



$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$2(6)+3(0)=2(-1.2)+3\vec{v}_{2f}$$

مع ملاحظة أن $v_{1f} = -1.2$ لأنها باتجاه محور السينات السالب.

$$2(6)+3(0)=2(-1.2)+3v_{2f}$$

$$3v_{2f} = 14.4$$

$$v_{2f} = 4.8m/s$$

والإشارة الموجبة تعني أن m_2 تحركت باتجاه محور السينات الموجب بعد التصادم.

مثال٤: كرتان كتلتاهما $100g$، $200g$ تتحركان باتجاه بعضهما بسرعتين $0.4m/s$، $0.2m/s$ على الترتيب تصطدمان تصادماً رأسياً. إذا كان معامل الارتداد لهما 0.5، أوجد سرعتيهما بعد التصادم.

الحل:

نفرض أن الكرة الأولى ($m_1 = 100g$) تتحرك باتجاه محور السينات الموجب ($v_{1i} = 0.4m/s$) والثانية ($m_2 = 200g$) وتتحرك باتجاه محور السينات السالب فتكون سرعتها ($v_{2i} = -0.2m/s$)، وبتطبيق قانون حفظ كمية الحركة:

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$(0.1)(0.4) + (0.2)(-0.2) = (0.1)v_{1f} + (0.2)v_{2f}$$

$$v_{1f} + 2v_{2f} = 0 ....(1)$$

وباستخدام تعريف معامل الارتداد:

$$\varepsilon = -\frac{(v_{1f} - v_{2f})}{(v_{1i} - v_{2i})}$$

$$0.5 = -\frac{(v_{1f} - v_{2f})}{[0.4 - (-0.2)]}$$

$$v_{2f} - v_{1f} = 0.3 ....(2)$$

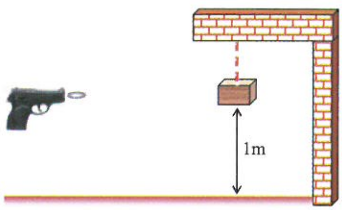
وبحل المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$v_{2f} = 0.1m/s$$

$$v_{1f} = -0.1m/s$$

وحيث أن إشارة السرعة لكل من الكرتين بعد التصادم تختلف عنها قبل التصادم فإن الكرتين تسيران عكس بعضهما عقب التصادم.

مثال٥: رصاصة كتلتها $m=100g$ تتحرك أفقيا بسرعة $20m/s$ تخترق قطعة خشبية ساكنة كتلتها $M=900g$ معلقة بخيط مهمل الكتلة فتستقر فيها وتتحركان معاً (انظر الشكل).
احسب أقصى ارتفاع تصل إليه القطعة الخشبة مع الرصاصة.



الحل:

أولاً باستخدام مبدأ حفظ كمية الحركة لتصادم عديم المرونة نحسب سرعة القطعة الخشبية والرصاصة بعد التصادم مباشرة :

$$mv_{1i}+Mv_{2i}=(m+M)v_f$$

$$0.1(20)+0=(0.1+0.9)v_f$$

$$v_f=2m/s$$

ثم نفرض أن مستوى الإسناد هو مستوى القطعة الخشبية لحظة الاصطدام ثم نطبق قانون حفظ الطاقة الميكانيكية للقطعة والرصاصة معاً (بعد التصادم):

$$E_i=E_f$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2=(m+M)gh$$

$$h=\frac{v^2}{2g}=$$

$$h=\frac{(2)^2}{2(9.8)}=0.2m$$

وبذلك فإن ارتفاع الخشبة مع الرصاصة عن الأرض يساوي $1.2m$.

مثال٦: في الثانية الأولى من انطلاق صاروخ رأسيا إلى أعلى من منصته في فلوريدا الأمريكية قذف $1/60$ من كتلته بسرعة نسبية مقدارها $2400m/s$. اوجد التسارع الابتدائي للصاروخ.

الحل:

باستخدام العلاقة:

$$M\frac{dv}{dt}=v_e\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{v_e}{M}\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{2400}{M}\left(\frac{1}{60}M\right)$$

$$a=\frac{2400}{60}=40m/s^2$$

ولكون الصاروخ في مجال الجاذبية الأرضية فان التسارع الحقيقي يكون :

$$a=40-g=40-9.8=30.2m/s^2$$

أسئلة وتمارين

أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

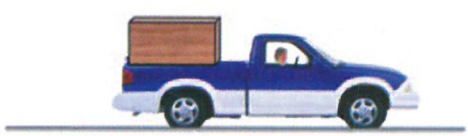
١- وحدة القياس $N.s$ تساوي:			
أ- $kg\,m/s^2$	ب- $kg\,m/s$	ج- $kg\,s/m$	د- $kg.m.s$
٢- إذا كان الدفع الذي يؤثر به قدم لاعب على كرة قدم هو $6N.s$ وكان زمن ملامسة القدم للكرة $0.5s$، فإن متوسط القوة التي يؤثر بها اللاعب على الكرة:			
أ- $3N$	ب- $6N$	ج- $1.5N$	د- $12N$
٣- جسم كتلته $3kg$ يتحرك بسرعة ابتدائية $1m/s$. إذا كان دفع قوة عليه $9N.s$، فإن سرعته النهائية تساوي:			
أ- $4m/s$	ب- $2m/s$	ج- $2.4m/s$	د- $3m/s$
٤- جسم يتحرك بحيث أن كمية حركته p_o. إذا أصبحت طاقة حركته أربعه أضعاف طاقة حركته الأولى، فإن كمية حركته تصبح:			
أ- $4P_o$	ب- $2P_o$	ج- $\sqrt{2}P_o$	د- $\sqrt{2P_o}$
٥- رصاصة كتلتها $16g$ تتحرك بسرعة $10m/s$ قبل أن تصطدم رأساً برأس head on بقطعة خشبية ساكنة كتلتها $84g$ وتستقر بها وتتحركان معاً بنفس الاتجاه. احسب سرعتها بعد التصادم.			
أ- $4m/s$	ب- $1.6m/s$	ج- $0.4m/s$	د- $2.5m/s$

ثانيا:

١ - إذا أسقط حكم مباراة كرة قدم عموديا من ارتفاع $1.5m$ فارتدت راسياً إلى ارتفاع $1.3m$، احسب معامل الارتداد للكرة.

٢- جسم كتلته $2kg$ يتحرك أفقياً بسرعة قدرها v_o باتجاه جسم آخر ساكن، على نهايته لاصق، فيصطدم به تصادما عديم المرونة ويتحركان معا بنفس الاتجاه بسرعة قدرها $\frac{v_o}{4}$. احسب كتلة الجسم الثاني.

٣- سيارة كتلتها $2000kg$ تسير بسرعة $60\,km/h$ في طريق أفقي وتحمل صندوق كتلته $200kg$ وخلال الطريق فجأة يسقط الصندوق وتستمر السيارة بحركتها بنفس السرعة. احسب سرعة واتجاه الصندوق مباشرةً بعدما يسقط من السيارة.

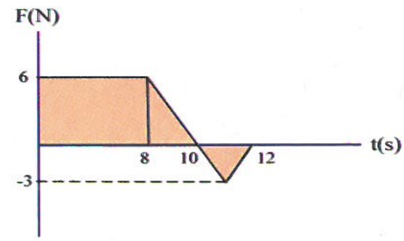


٤ - كرتان تتحركان باتجاه بعضهما البعض، الأولى كتلتها $1kg$ تتحرك بسرعة $6m/s$ باتجاه محور السينات الموجب والأخرى كتلتها $3kg$ تتحرك بالاتجاه المعاكس بسرعة $2m/s$. إذا اصطدمت الكرتان تصادما مرناً رأس برأس، أوجد سرعتيهما بعد التصادم.

٥- سيارة كتلتها $2000kg$ تتجه شرقاً بسرعة قدرها $20m/s$ وفجأة تلتقي بسيارة أخرى مماثلة، على مفترق طرق، تتحرك شمالاً بسرعة قدرها $10m/s$ فتصطدم بها تصادما عديم المرونة. احسب نسبة طاقة الحركة الضائعة نتيجة التصادم.

٦- باستخدام نظرية الدفع - كمية الحركة، أوجد القوة اللازمة لتغيير سرعة صندوق كتلته $4kg$ بمقدار $10m/s$ خلال زمن قدره $4s$.

٧- الشكل المجاور يبين علاقة القوة مع الزمن والمؤثرة على جسم كتلته $3kg$. احسب سرعة الجسم بعد $12s$ علماً بأنّ الجسم بدأ حركته من السكون.



٨- أطلق صاروخ كتلته $2.55x10^4kg$ رأسياً من سطح الأرض. إذا كان معدل احتراق الوقود $600kg/s$ وسرعة الغازات المقذوفة $1700m/s$ نسبة إلى سرعة الصاروخ، احسب:

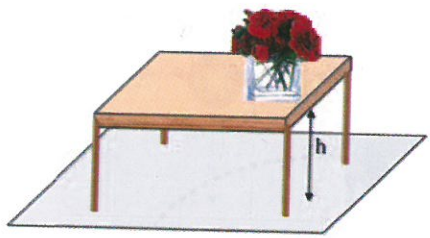
أ- مقدار الدفع على الصاروخ.
ب- التسارع الابتدائي للصاروخ على منصة الإطلاق

(تنبيه: اعتبر الجاذبية الأرضية).

أسئلة تحدي

١- رصاصة كتلتها $0.05kg$ تتحرك أفقيا وتصطدم رأس برأس بقطعة خشبية كتلتها $2kg$ ساكنة على سطح أفقي معامل احتكاكه الحركي 0.3 فتتحركان معا مسافة قدرها $25.3m$ ثم تتوقفان. أوجد سرعة الرصاصة قبل اصطدامها بالقطعة الخشبية.

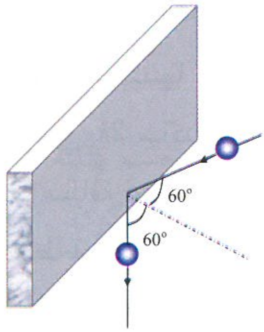
٢- آنية زهور كتلتها $1kg$ موضوعة على طاولة ارتفاعها h عن الأرض، سقطت وانكسرت الى جزئيين الأول كتلته $0.6kg$ ارتد للأعلى بسرعة $2m/s$ والجزء الآخر كتلته $0.4kg$ ارتد للأعلى بسرعة $4.8m/s$. بفرض عدم ضياع للطاقة، احسب الارتفاع h.



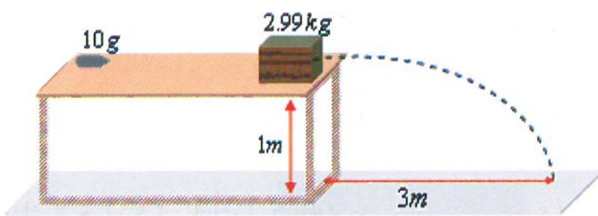
٣- طائرة هيلوكبتر كتلتها $500kg$ تتحرك بسرعة $250m/s$ فتطلق قذيفة كتلتها $50kg$ بسرعة $500m/s$ بنفس اتجاه حركة الطائرة. احسب سرعة الطائرة مباشرة بعد إطلاق القذيفة.

٤- لاعب تنس يستقبل كرة كتلتها $0.05kg$ تتحرك أفقيا بسرعة $30m/s$ ويصدها بالمضرب لتعود بسرعة $20m/s$. إذا لامست الكرة المضرب مدة $0.25s$ ، احسب متوسط القوة التي يؤثر بها المضرب على الكرة .

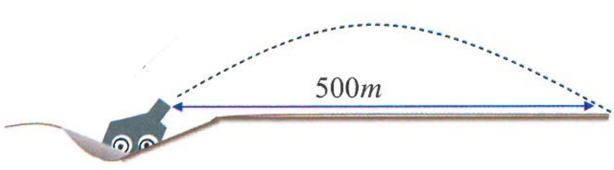
٥- الشكل المجاور يبين كرة معدنية كتلتها $2kg$ وسرعتها $15m/s$ تتحرك في المستوى الأفقي وتصطدم في حائط بزاوية 30^o عن مستوى السطح (60^o مع العمودي على السطح). إذا كان زمن التلامس خلال عملية الاصطدام $0.075s$، احسب مقدار متوسط القوة التي يؤثر بها الحائط على الكرة.



٦- أطلقت رصاصة كتلتها $10g$ على قطعة خشبية كتلتها $2.99kg$ ساكنة على حافة طاولة عديمة الاحتكاك ارتفاعها $1m$ واستقرت الرصاصة في القطعة الخشبية. إذا سقطت القطعة الخشبية على بعد $3m$ من أسفل الطاولة، احسب السرعة الابتدائية للرصاصة.

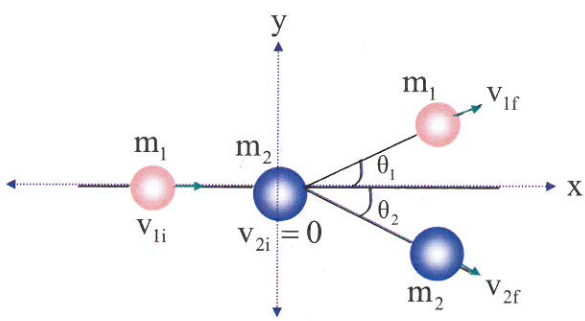


٧- أطلق مدفع قذيفة بسرعة $20m/s$ بزاوية 60^o على موقع للأعداء يبعد مسافة $500m$ عن المدفع وعند أقصى ارتفاع انفجرت القذيفة الى جزئيين (شطرين) متماثلين. إذا سقط الجزء الأول على الأرض على بعد $250m$ من المدفع، أوجد موقع سقوط الجزء الثاني (من المدفع) إذا استغرق $25s$ حتى يصل الأرض.



٨- كرة كتلتها m_1 تتحرك بسرعة v_{1i} باتجاه محور السينات الموجب فتصطدم بكرة أخرى ساكنة كتلتها m_2. إذا تحركت الكرة الأولى بعد التصادم بسرعة v_{1f} وبزاوية θ_1 عن محور السينات الموجب وتحركت الكرة الثانية بسرعة v_{2f} وبزاوية θ_2 عن محور السينات الموجب (انظر الشكل)، أثبت أن

$$\tan\theta_2 = \frac{v_{1f}\sin\theta_1}{v_{1i} - v_{1f}\cos\theta_1}$$



٩- صاروخ في الفضاء الخارجي له القدرة على الاحتفاظ بكتلة كلية مقدارها $3x10^3\,kg$ وبسرعة $10x10^3\,m/s$. احسب كتلة الوقود التي يحتاجها إذا صمّم بحيث تقذف الغازات بسرعة أ) $2x10^3\,m/s$ ب) $5x10^3\,m/s$

(**ملاحظة:** أهمل تأثير الجاذبية الأرضية).

الوحدة التاسعة

كاينمتيكا الحركة الدورانية

كاينمتيكا الحركة الدورانية

- طبيعة حركة عقارب الساعة دورانية وليست انتقالية، فسر ذلك؟
- في الدراجة الهوائية فإن القرص المسنن والذي يسبب الحركة والمثبت في العجلة يكون قطره أصغر من قطر القرص الذي تحركه بقدميك، فسر ذلك؟
- ماذا يعني لك العداد rpm في لوحة عدادات السيارة؟

(٩-١) الحركة الدورانية والإزاحة الزاوية:

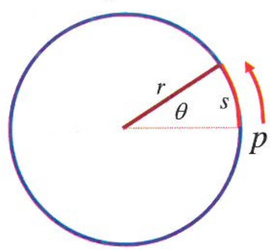
شكل (١-٩):
ألعاب ترفيهية بالحركة الدورانية

في تصور بسيط، فان الجسم الذي يـدور تتحرك جميع نقاطه في مسار دائري وتشكل مراكز المسارات الدائرية خطاً يعرف باسـم محور الدوران.

الزاوية التي يتحركها الجسم الصلب حول محور ثابت (محور الدوران) تسمى الإزاحة الزاوية. واصطلاحاً فان الإزاحة

الزاوية تكون موجبة إذا كان الدوران (دوران الجسم) بعكس عقارب الساعة وتكون سالبة إذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة والوحدة العلمية لقياس الإزاحة الزاوية في النظام العالمي للوحدات هي (radian) تلفظ ريديان (أو راديان) ويرمز لها بالرمز rad وتدعى أحيانا زاوية نصف قطرية وأحيانا يعبر عن هذه الوحدة بالزاوية $\left(1rad = 360/2\pi = 57.3^o\right)$ أو الدورة revolution ويرمز لها بالرمز rev $\left(1rev = 2\pi rad = 360^o\right)$.

بفرض أن النقطة p تتحرك زاوية θ فإنها تقطع أيضا القوس الذي طوله s ويكون:



$$s = r\theta \qquad (9\text{-}1)$$

أو

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (9\text{-}2)$$

ولكونها تمثل $\frac{\text{طول}}{\text{طول}}$ فإنها تعامل كعدد بدون وحدات (أي أن *rad* لا يمثل وحدة فيزيائية).

مثال: إذا كانت الزاوية $\theta = 30^o$، فكم تساوي هذه الزاوية بالتقدير النصف قطري (الريديان) ؟

الحل:

$$360^o \longrightarrow 2\pi$$

$$30^o \longrightarrow \theta = ?$$

فتكون θ بالريديان :

$$\theta = \frac{(2\pi)(30)}{360} = \frac{\pi}{6} rad = 0.52 rad$$

أو مباشرة، للتحويل من التقدير بالدرجة الى التقدير الدائري نقسم على 57.3 فنحصل على :

$$\theta = \frac{30}{57.3} = 0.52 rad$$

السرعة الزاوية :

بالمقارنة مع :

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \qquad (3\text{-}1)$$

حيث $\vec{v}$: السرعة (الخطية) المتوسطة

$\Delta \vec{x}$: الإزاحة الخطية.

Δt :الفترة الزمنية التي حصلت خلالها الإزاحة الخطية.

وكلمة (الخطية) لتؤكد أن الحركة ليست دورا نية وإنما خطية (انتقال الجسم من موقع إلى آخر).

فان $$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (9-3)$$

حيث $\bar{\omega}$: السرعة (الزاوية) المتوسطة وهذا الرمز يلفظ اوميغا omega .

$\Delta\theta$: الإزاحة الزاوية.

Δt :الفترة الزمنية التي حصلت خلالها الإزاحة الزاوية.

وكلمة الزاوية تؤكد أن الحركة دورا نية وليست خطية (لم يحصل للجسم انتقال كلي من مكان لآخر بل حصل دوران حول محور ثابت). وتكون وحدة ω في النظام العالمي هي rad/s .

ويتم تحديد اتجاه ω باستخدام قاعدة اليد اليمنى حيث تشير الأصابع إلى اتجاه الدوران بينما يشير الإبهام إلى اتجاه ω، وبهذا الاصطلاح فان الاهتمام يكون على قيمة ω حيث أن الاتجاه أصبح محدداً.

شكل (٣-٩): تحديد اتجاه السرعة الزاوية باستخدام قاعدة اليد اليمنى

وتكون ω موجبة إذا كان دوران الجسم بعكس عقارب الساعة وسالبة إذا كان دوران الجسم باتجاه عقارب الساعة.

وبالمقارنة مع السرعة الخطية اللحظية أو اللحظية اصطلاحاً، فإن السرعة الزاوية اللحظية ω تكون :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (9-4)$$

أي أن السرعة الزاوية اللحظية تساوي المشتقة الأولى للإزاحة الزاويّة θ بالنسبة للزمن t.

وقيمة السرعة الزاوية اللحظية بغض النظر عن كونها موجبة (دوران الجسم بعكس عقارب الساعة) أو سالبة (دوران الجسم باتجاه عقارب الساعة) تسمى السرعة الزاوية اللحظية.

وإذا كانت السرعة الزاوية ثابتة فإن قيمة السرعة الزاوية اللحظية وقيمة السرعة الزاوية المتوسطة تكون نفسها.

مثال: جسم يدور حول محور ثابت بدأ الحركة من السكون ودار زاوية مقدارها 120^o في زمن قدره $2s$. احسب السرعة الزاوية المتوسطة له.

الحل:

لإيجاد الزاوية التي يتحركها بالريديان :

$$360^o \longrightarrow 2\pi$$

$$120^o \longrightarrow \theta = ?$$

فتكون θ بالريديان :

$$\theta = \frac{(2\pi)(120)}{360} = \frac{2\pi}{3} rad = 2.09 rad$$

وعليه تكون السرعة الزاوية المتوسطة ω :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - 0}{t}$$

$$\omega = \frac{2.09 - 0}{2} = 1.05 rad / s$$

التسارع الزاوي:

بالمقارنة مع التسارع الخطي:

$$\bar{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (3 - 4)$$

حيث $\bar{a}$: متوسط التسارع الخطي.

$\Delta\vec{v}$: التغير في السرعة الخطية.

Δt : الفترة الزمنية (الزمن الذي تغيرت به سرعة الجسم من $\vec{v}_i$ إلى $\vec{v}_f$).

فإن

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \qquad (9 - 5)$$

حيث $\bar{\alpha}$: متوسط التسارع (الزاوي) والرمز α يلفظ ألفا alpha ويكون باتجاه التغير في $\bar{\omega}$.

ووحدة α في النظام العالمي للوحدات هي rad/s^2

Δt : الفترة الزمنية.

وأيضا بالمقارنة مع التسارع الخطي، فان التسارع الزاوي اللحظي يكون :

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (9-6)$$

أي أن التسارع الزاوي اللحظي يساوي المشتقة الأولى للسرعة الزاوية اللحظية ω بالنسبة للزمن t.

وعادة في الحركة الزاوية نفترض أن التسارع الزاوي ثابت وتتساوى قيمتا التسارع الزاوي المتوسط والتسارع الزاوي اللحظي.

(٩-٢) قوانين وصف الحركة الدورانية

سبق وان درسنا قوانين الحركة الخطية لجسيم يتحرك بتسارع (خطي) ثابت :

$$v = v_o + at \qquad (3-10)$$

$$x = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (3-12)$$

$$v^2 = v_o^2 + 2ax \qquad (3-13)$$

وبالمثل فان قوانين الحركة الزاوية التي تصف جسيم يتحرك بتسارع زاوي ثابت تكون :

$$\omega = \omega_o + \alpha t \qquad (9-7)$$

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad (9-8)$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta \qquad (9-9)$$

وبمقارنة هذه المعادلات الثلاث والتي تصف حركة جسيم بتسارع ثابت، للحركتين الخطية والدورانية، فإنه يمكن ملاحظة التناظر بين الكميات الفيزيائية كما يوضح الجدول التالي:

الكمية الفيزيائية	الحركة الخطية	الحركة الدورانية
الإزاحة	x	θ
السرعة الابتدائية	v_o	ω_o
السرعة النهائية	v	ω
التساع	a	α

مثال: قرص يدور حول محور بتسارع زاوي ثابت مقداره $7rad/s^2$. إذا كانت السرعة الزاوية الابتدائية له $3rad/s$، احسب:

أ- الزاوية التي يقطعها (يدورها) القرص خلال زمن $2s$.

ب- السرعة الزاوية للقرص بعد $2s$.

الحل:

أ- لحساب الزاوية نستخدم معادلة الحركة:

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 3(2) + \frac{1}{2}(7)(2)^2 = 20rad$$

ب - لحساب السرعة الزاوية نستخدم المعادلة:

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\omega = 3 + 7(2) = 17rad/s$$

المتغيرات الزاوية والمتغيرات المماسية:

الآن وباستخدام العلاقة:

$$s = r\theta \qquad (9\text{-}1)$$

حيث θ بالزوايا النصف قطرية (rad)، وبقسمة الطرفين على t :

$$\frac{s}{t} = r\frac{\theta}{t} \qquad (9\text{-}10)$$

أو:

$$v_T = r\omega \qquad (9\text{-}11)$$

حيث v_T السرعة المماسة.

ويعرف التسارع المماسي a_T:

$$a_T = \frac{\Delta v_T}{t} = r\left(\frac{\omega - \omega_o}{t}\right) \qquad (9\text{-}12)$$

إذن :

$$a_T = r\alpha \qquad (9\text{-}13)$$

حيث وكما سبق، فإن وحدة α هي rad/s^2 .

ومن فوائد استخدام ω، α بدلاً من v_T، a_T أنها تصف حركة الجسيم كاملاً بينما v_T، a_T تصف حركة نقطة على الجسيم والتي تختلف باختلاف r .

التسارع المركزي والتسارع المماسي:

وكما سبق ذكره فإن الجسم الذي يتحرك حركة دائرية (أو دورانية) بسرعة مماسه منتظمة فإنه يكون له تسارع مركزي وذلك بسبب تغير اتجاه السرعة المماسية (وليس مقدارها) ويعطى هذا التسارع المركزي a_c بالعلاقة :

$$a_c = \frac{v_T^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} \qquad (9\text{-}14)$$

أو

$$a_c = r\omega^2 \qquad (9\text{-}15)$$

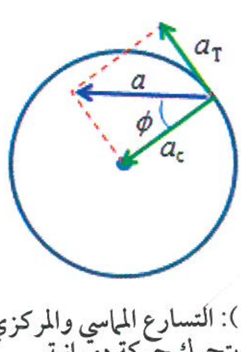
وكما سبق ذكره فإن وحدة ω هي rad/s وليس rev/s.

وفي حالة تغير قيمة السرعة المماسة إضافة الى تغير اتجاهها فانه يكون هناك تسارع مماسي a_T إضافة الى التسارع المركزي a_c ويكونان متعامدين، وباستخدام نظرية فيثاغورس فان قيمة التسارع الكلي a للجسيم تعطى بالعلاقة:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \qquad (9\text{-}16)$$

كما يعطى اتجاه التسارع الكلي a بالعلاقة :

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_T}{a_c} \qquad (9\text{-}17)$$



شكل (٤-٩): التسارع المماسي والمركزي لجسم يتحرك حركة دورانية

حيث ϕ الزاوية التي يصنعها a مع a_c (انظر الشكل أعلاه).

مثال: دولاب نصف قطره $2m$ يدور حول محور يمر من مركزه بسرعة $150 \ rev/\min$. احسب

أ- السرعة الزاوية للدولاب.
ب- زمن الدورة الواحدة للدولاب.
ج - السرعة المماسية لنقطة على محيط الدولاب.

الحل:

أ- نحول سرعة الدوران من وحدات $rev/\min$ إلى وحدات rad/s:

$$\omega = 150\frac{rev}{\min}\left(\frac{2\pi rad}{rev}\right)\left(\frac{1\min}{60s}\right) = 5\pi = 15.7rad/s$$

ب- بما أن:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

ففي الدورة الكاملة تكون $\theta = 2\pi$ ويكون الزمن الدوري (زمن الدورة الواحدة) $t = T$ ، وعليه فإن:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$5\pi = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 0.4s$$

ج – السرعة المماسية لنقطة على محيط الدولاب v_T تعطى بالعلاقة:

$$v_T = r\omega$$

$$v_T = 2(15.7) = 31.4 m/s$$

تساؤل: في المثال السابق، احسب التسارع المركزي a_c لنقطة على محيط الدولاب.

مثال: جسيم يتحرك حركة دورانية بحيث تتغير زاوية دورانه θ مع الزمن t وفق المعادلة التالية:

$$\theta = 2t^2 - t + 5 \quad rad$$

احسب السرعة الزاوية المتوسطة له خلال الفترة الزمنية من $t = 0s$ إلى $t = 5s$.

الحل:

عندما $t = 0$ فإن الزاوية θ تكون:

$$\theta = 2(0)^2 - (0) + 5 = 5 rad$$

عندما $t = 5$ فإن الزاوية θ تصبح:

$$\theta = 2(5)^2 - 5 + 5 = 50 rad$$

وعليه فإن السرعة الزاوية المتوسطة ω:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{50-5}{5-0} = 9 rad/s$$

أمثلة محلولة

مثال١: يستخدم قرص (CD) في الجهاز المجاور بحيث يدور بسرعة ابتدائية $40rev/s$ ويستغرق $20s$ ليتوقف. احسب:

أ - تسارع القرص الزاوي بفرض أنه ثابت.

ب- عدد الدورات التي يدورها قبل أن يتوقف.

ج- السرعة الخطية المماسية الابتدائية لنقطة على حافة القرص إذا كان نصف قطره $7cm$.

د - التسارع الخطي المماسي والمركزي لنقطة على حافة القرص.

الحل:

أ- نحسب سرعة القرص الابتدائية بوحدات rad/s

$$\omega_o = 40\frac{rev}{\min}\left(\frac{2\pi rad}{rev}\right)\left(\frac{\min}{60s}\right) = 4.19 rad/s$$

ثم نستخدم معادلة الحركة التالية لحسب التسارع الزاوي :

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$0 = \omega_o + \alpha t$$

$$\alpha = -\frac{\omega_o}{t} = -\frac{4.19}{20} = -0.21 rad/s^2$$

والإشارة السالبة تعني تباطؤ.

ب - نحسب الإزاحة الزاوية ثم نقسمها على إزاحة الدورة الواحدة :

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 4.19(20) + \frac{1}{2}(-0.21)(20)^2 = 41.8 rad$$

وعليه يكون عدد الدورات n :

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{41.8}{6.28} = 6.65$$

ج - نحسب السرعة الخطية المماسية الابتدائية لنقطة على حافة القرص من المعادلة:

$$v_o = r\omega_o$$

$$v_o = (0.07)(4.19) = 0.29 m/s = 29 cm/s$$

د - نحسب التسارع الخطي المماسي a_T لنقطة على حافة القرص من المعادلة التالية:

$$a_T = r\alpha$$

$$a_T = 0.07(0.21) = 1.47 x 10^{-2} m/s^2 = 1.47 cm/s^2$$

وكذلك التسارع المركزي a_c لنقطة على حافة القرص:

$$a_c = r\omega_o^2$$

$$a_c = 0.07(4.19)^2 = 1.23m/s^2 = 123cm/s^2$$

تساؤل: أوجد التسارع الكلي مقداراً واتجاهاً.

مثال٢: قرص طاحونة حبوب يدور بعجلة زاوية منتظمة مقدارها $0.4rad/s^2$. إذا كانت سرعته الزاوية الابتدائية $-6rad/s$، أوجد الزمن اللازم حتى يدور القرص 10 دورات.

الحل:

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

عندما يدور القرص 10دورات يعني أن $\theta = 10rev$ فإن θ (بالريديان) تكون:

$$\theta = 10rev\left(\frac{2\pi rad}{rev}\right) = 20\pi = 62.83rad$$

وبالتعويض في المعادلة:

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

نحصل على :

$$62.83 = (-6)t + \frac{1}{2}(0.4)t^2$$

$$0.2t^2 - 6t - 62.83 = 0$$

وبحل المعادلة التربيعية باستخدام المميز:

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(0.2)(-62.83)}}{2(0.2)} = \frac{6 \pm 9.29}{0.4}$$

و بإهمال الإجابة السالبة نحصل على:

$$t = 38.2s$$

تساؤل: احسب الزمن اللازم حتى يتوقف القرص.

مثال٣: مروحة تتحرك بسرعة زاوية $3rad/s$. إذا أصبحت سرعتها الزاوية $6.8rad/s$ بعد دورانها $20rev$ بتسارع زاوي منتظم، احسب:

أ- التسارع الزاوي.

ب- الزمن المستغرق حتى تتغير السرعة الزاوية من $3rad/s$ الى $6.8rad/s$.

الحل:

$$\theta = 20rev\left(\frac{2\pi rad}{rev}\right) = 40\pi = 125.66rad$$

أ- نستخدم المعادلة:

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$$

$$(6.8)^2 = (3)^2 + 2\alpha(125.66)$$

$$\alpha = 0.148rad/s^2$$

ب – لحساب الزمن نستخدم المعادلة:

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{6.8 - 3}{0.148} = 25.7s$$

مثال٤: احسب السرعة الزاوية لدوران الأرض حول الشمس بوحدات rad/s.

الحل:

زمن دوران الأرض حول الشمس $T = 365days$

$$T = 365day\left(\frac{24h}{day}\right)\left(\frac{60\min}{h}\right)\left(\frac{60s}{\min}\right) = 315.36x10^5\,s$$

عند عمل دورة واحدة كاملة تكون الزاوية $\theta = 2\pi rad$ وعليه فان:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{315.36x10^5} = 199x10^{-9}\,rad/s$$

أسئلة وتمارين

أولا: اختر الإجابة الصحيحة:

١- ذراع مروحة كهربائية يدور 180 دورة في الدقيقة. احسب السرعة الزاوية للمروحة بوحدات rad/s .			
أ- 3π	ب- 6π	ج- π	د- $1/3\pi$
٢- إذا كان طول ذراع المروحة في السؤال السابق $30cm$، فإن السرعة المماسية لنقطة على حافته تساوي:			
أ- $0.94m/s$	ب- $1.9m/s$	ج- $5.7m/s$	د- $0m/s$
٣- جرار زراعى قطر إطاره الأمامى $16inch$ وقطر إطاره الخلفى $24inch$. عندما يتحرك الجرار مسافة مقدارها $100m$ بسرعة ثابتة فإن النسبة بين السرعة الزاوية للإطار الأمامى ω_1 الى السرعة الزاوية للإطار الخلفى ω_2 لنقطتين على حافة كل من الإطارين تساوي: 			
أ- 1	ب- 1.5	ج- 0.67	د- 3.14
٤- مسطرة مترية تدور حول محور عند أحد أطرافها بحيث تكمل 50 دورة في الدقيقة. احسب السرعة المماسة والتسارع المركزي لنقطة على حافة طرفها الآخر.			
أ- $5.24m/s$ $27.4m/s^2$	ب- $2.54m/s$ $27.4x10^1 m/s^2$	ج- $52.4m/s$ $15.5x10^3 m/s^2$	د- $10.0m/s$ $7.34x10^3 m/s^2$

٥- إذا علمت أن القمر يكمل دورة كاملة حول الأرض خلال $29days$ وأن المسافة بين مركز الأرض ومركز القمر هي $3.8x10^8 m$ ، فان التسارع المركزي للقمر:

أ- $2.4 \times 10^{20}\ m/s^2$	ب - $9.8\ m/s^2$	ج - $1.6\ m/s^2$	د - $1.5 \times 10^2\ m/s^2$

ثانياً:

١- جهاز طرد مركزي في مختبر طبي لفحص عينات دم يدور بسرعة $3200rev/\min$ بعد الضغط على مفتاح إيقاف التشغيل توقف الجهاز بعد زمن مقداره $1.87s$. احسب عدد الدورات التي تحركها الجهاز قبل أن يتوقف.

٢- لاعب يضرب كرة بيسبول (baseball) باتجاه المرمى بسرعة انتقالية $85mi/h$ وبسرعة دورانية $1800rev/\min$. بفرض أن طول المسار الأفقي $60ft$ ، احسب عدد الدورات التي تدورها الكرة خلال انتقالها.

٣- عجلة تدور حول محور حيث تتغير سرعتها الزاوية مع الزمن وفق المعادلة $\omega = 2t^2 + 10$. إذا كان التسارع الزاوي المتوسط يساوي $12rad/s^2$ خلال الفترة من $1s$ الى t، احسب الزمن t.

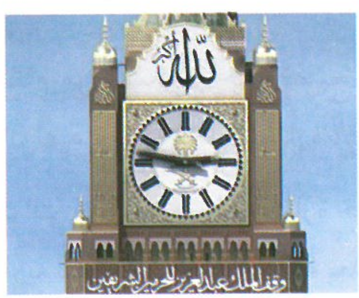
٤- عجلة تدور وتحتاج $3s$ حتى تكمل 30 دورة. إذا كانت السرعة الزاوية في بداية الثلاث ثواني هي $9.8rad/s$، احسب التسارع الزاوي للعجلة علماً بأنه ثابت.

٥- طائرة هيلوكبتر ذات مروحة رئيسية قطرها $7m$ تدور بسرعة $450 rev/\text{min}$ ومروحة أخرى في ذيل الطائرة قطرها $1m$ تدور بسرعة $4500 rev/\text{min}$.
احسب السرعة الخطية لكل من حافتي المروحتين.

٦- أوجد السرعة الزاوية لكل مما يلي في ساعة مكة المكرمة:

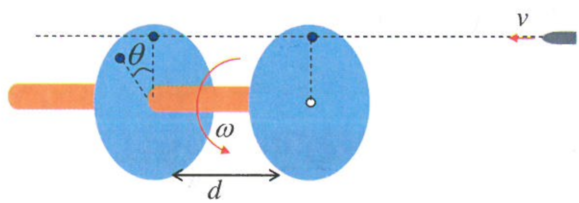
أ- ذراع الساعات.

ب- ذراع الدقائق.



أسئلة تحدي

١- يمكن قياس سرعة رصاصة باستخدام قرصين ورقيين المسافة بينهما $d = 60cm$ يدوران بسرعة $\omega_o = 800rev/s$ كما في الشكل المبين أدناه. إذا علمت أن الرصاصة تخترق الورقة الأولى وتثقب الورقة الثانية بعد أن تكون قد دارت زاوية قدرها $\theta_o = 31^o$، احسب سرعة الرصاصة.

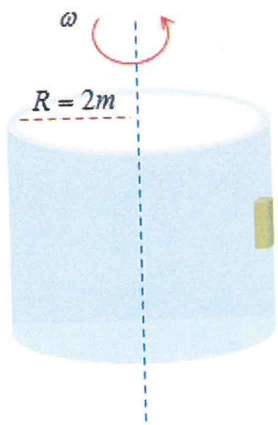


٢- سيارة تتسارع بانتظام من السكون حتى تصبح سرعتها $16m/s$ بعد زمن مقداره $6s$. إذا كان نصف قطر عجلة السيارة $17inch$، احسب:

أ- عدد الدورات التي تدورها عجلة السيارة خلال هذه الفترة.

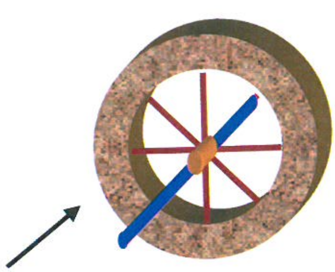
ب- السرعة الزاوية لنقطة على محيط العجلة بعد $6s$.

٣- اسطوانة كبيرة نصف قطرها الداخلي $2m$، وضع جسم على جدارها الداخلي وعلى ارتفاع من أرضية الاسطوانة واتزن على الجدار نتيجة دوران الاسطوانة (انظر الشكل). إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم وجدار الاسطوانة 0.5 احسب أقل سرعة زاوية تتحرك بها الاسطوانة حتى لا يسقط الجسم.



٤- دراجة ذات عجلتان نصف قطر كل واحدة منهما r تسير على الأرض، ودون تزحلق، بتسارع خطي منتظم. إذا قطعت الدراجة مسافة تساوي ١٠ أضعاف نصف قطر عجلتها خلال ٥ ثواني وذلك بمضاعفة سرعتها الخطية في اتجاه حركتها خلال ذلك، احسب التسارع الزاوي للعجلات.

٥ – قرص نصف قطره $30cm$ مثبت حول محور دوران بقضبان خفيفة تقسمه الى ثماني مناطق متماثلة (انظر الشكل). إذا كان القرص يدور حول المحور بسرعة $3rev/s$، وأطلق سهم طوله $20cm$ بشكل موازي لمحور الدوران، احسب السرعة للسهم حتى يخترق القرص دون أن يضرب بأحد القضبان.



الوحدة العاشرة

ديناميكا الحركة الدورانية

ديناميكا الحركة الدورانية

- لماذا يكون مقبض الباب عند أبعد نقطة من الفصّاليات (مواضع تركيب الباب)؟
- لماذا تكون حركة طفل في أرجوحة أسهل عندما يكون حبل الأرجوحة أقصر؟
- عند فك أحد صواميل عجلة سيارتك فإنه يفضل أن تستخدم مفتاح ذات ذراع أطول. لماذا؟

(١-١.) تأثير القوى و العزوم على حركة الأجسام الصلبة (الجاسئة):

علم الاستاتيكا:

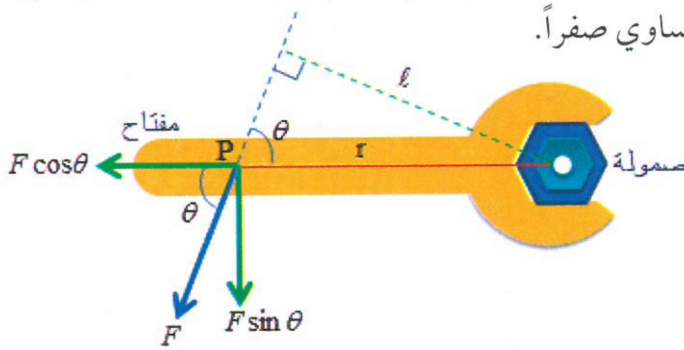
يعنى علم الاستاتيكا (ميكانيكا الأجسام الساكنة) بدراسة القوى المؤثرة على جسم في حالة اتزان وفى حالة سكون. وتكمن أهميته في الإجابة على العديد من الأسئلة في مجالات هامّة كالهندسة (الجسور) والطب (تقويم الأسنان) مثلاً.

وتتركز دراستنا هنا على الجسم الصلد والذي لا يتغير حجمه أو شكله عند تعرضه لقوة (أو محصلة قوى). ويكون الجسم الصلد في حالة اتزان (انتقالي ودوراني) إذا تحقق الشرطان:

١- محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه تساوي صفراً حيث يبقى الجسم الساكن ساكنا والمتحرك يبقى تسارعه صفراً وهذا شرط الاتزان الانتقالي (الخطي) والذي يمثل إعادة صياغة لقانون نيوتن الأول.

٢- محصلة العزوم الخارجية المؤثرة عليه تساوي صفراً، حيث أن القوى التي محصلتها صفراً قد تتسبب في دوران الجسم وتعرف الكمية التي تبيّن قدرة (إمكانية) القوة (القوى) على إحداث دوران للجسم بـ "العزم" أو "عزم القوة". إذن يكون الجسم في حالة اتزان دوراني فقط إذا كانت محصلة العزوم للقوى الخارجية المؤثرة تساوي صفراً.

ولنرى ذلك دعنا نتخيل سائق دراجة هوائية يؤثر على مقود الدراجة بقوتين متساويتين مقداراً ومتعاكستين اتجاهاً، أي أنَ محصلة القوى يساوي صفراً، فإنَ الدراجة تكون في حالة اتزان انتقالي ولكن في نفس الوقت يحدث دوران لمقود الدراجة حول محور الدوران مما يعني عدم وجود اتزان دوراني، أي أن محصلة العزوم لا تساوي صفراً.



شكل (١-١٠): قوة تؤثر على ذراع مفتاح لفك صامولة

والحركة الانتقالية لجسم صلب هي الحركة التي تكون فيها حركة نقاط الجسم بشكل متوازي (على مسارات متوازية وليس شرطا خطوط مستقيمة). كما أنَ الحركة الدورانية، والتي تكون فيها حركة نقاط الجسم بشكل دائري حول محور دوران، تحدث عادة بالترافق مع الحركة الانتقالية.

والعزم يعتمد على قيمة القوة المؤثرة، نقطة تأثير القوة بالنسبة لمحور الدوران، وعلى اتجاه القوة ويرمز للعزم بالرمز τ ويلفظ تاو Tau. وبتأجيل تحديد الاتجاه، فإنَ قيمة العزم حول النقطة P (أي المحور المار بالنقطة P) تعطى بالعلاقة:

$$\tau = rF\sin\theta \qquad (10-1)$$

ويمكن وضع القانون على الصورة:

$$\tau = F\left(r\sin\theta\right) = F\ell \qquad (10-2)$$

وتكون ℓ المسافة العمودية بين محور الدوران وخط تأثير القوة.

أيضاً فإنَه يمكن كتابة القانون على الصورة:

$$\tau = r\left(F\sin\theta\right) \qquad (10-3)$$

أي أنّ مقدار العزم τ يساوي حاصل ضرب ذراع التأثير r في مركبة القوة العمودية على r.

وفي حال معرفة $\vec{r}$, $\vec{F}$ بدلالة متجهات الوحدة العمودية $\left(\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}\right)$ فإنّه يمكن كتابة العلاقة أعلاه على الصورة :

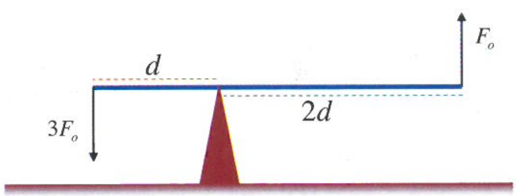
$$\vec{\tau} = \vec{r}\,\text{x}\,\vec{F} \qquad (10-4)$$

ويكون العزم $\vec{\tau}$ عمودياً على كل من المتجهين $\vec{F}, \vec{r}$ (أو عمودياً على المستوى الذي يحدده المتجهان $\vec{F}, \vec{r}$).

واصطلاحا فان τ تكون موجبة إذا أحدثت القوة (محصلة القوى) دوران في عكس عقارب الساعة كما تكون سالبة إذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة.

وبناء على تعريف العزم τ فان وحدته في النظام العالمي للوحدات هي $N.m$.

مثال: احسب محصلة العزوم المؤثرة حول نقطة الارتكاز على الساق الموضح في الشكل المجاور.



الحل:

$$\tau_1 = F\ell$$

$$\tau_1 = F_o(2d) = 2F_o d$$

وتكون موجبة حيث أن الدوران عكس عقارب الساعة.

$$\tau_2 = F\ell$$

$$\tau_2 = (3F_0)d = 3F_o d$$

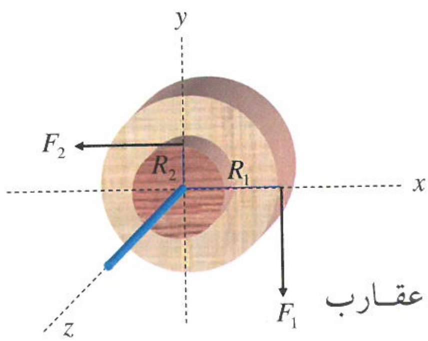
وتكون موجبة حيث أن الدوران عكس عقارب الساعة.

وعليه تكون محصلة العزوم τ:

$$\tau = 2F_o d + 3F_o d = 5F_o d$$

مثال: اسطوانة متماسكة بشكل قطعة واحدة تدور حول المحور z تحت تأثير القوتين F_1 ، F_2 (انظر الشكل) . احسب محصلة العزوم عليها حول المحور.

الحل:



$$\tau_1 = F\ell$$

$$\tau_1 = -F_1R_1$$

وتكون سالبة حيث أن الدوران باتجاه عقارب الساعة.

وكذلك:

$$\tau_2 = F\ell$$

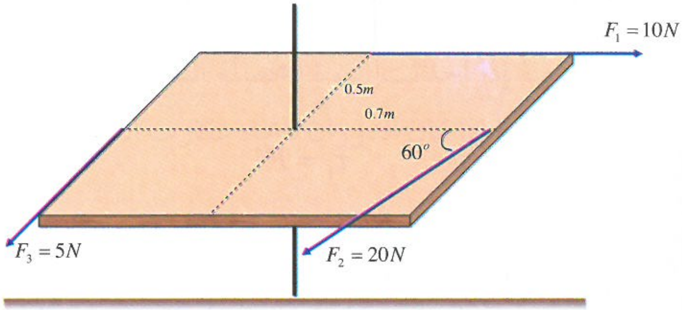
$$\tau_2 = F_2R_2$$

وتكون موجبة حيث أن الدوران عكس عقارب الساعة.

وعليه تكون محصلة العزوم τ حول المحور:

$$\tau = F_2R_2 - F_1R_1$$

مثـال: لوح خشبي على شكل مستطيل يدور بشكل أفقي حول محور مثبت رأسياً (انظر الشكل). احسب محصلة العزوم عليه حول المحور.



الحـل:

$$\tau_1 = F_1 r \sin\theta$$

$$\tau_1 = -10(0.5)\sin 90 = -5N.m$$

$$\tau_2 = F_2 r \sin\theta$$

$$\tau_2 = -20(0.7)\sin 60 = -12.12N.m$$

$$\tau_3 = F_3 r \sin\theta$$

$$\tau_2 = 5(0.7)\sin 90 = 3.5N.m$$

وبذلك تكون محصلة العزوم τ:

$$\tau = -5 - 12.12 + 3.5 = -13.62N.m$$

والإشارة السالبة تعني أن الدوران يكون باتجاه عقارب الساعة.

اتزان الأجسام الصلبة:

يقال أن الجسم الصلب في حالة اتزان إذا كان تسارعه الانتقالي (الخطي) يساوي صفر وكذلك تسارعه الدوراني (الزاوي). وعليه تكون محصلة القوى تساوي صفرا:

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (10-5)$$

أو بصيغة المركبات وفي بعدين يكون:

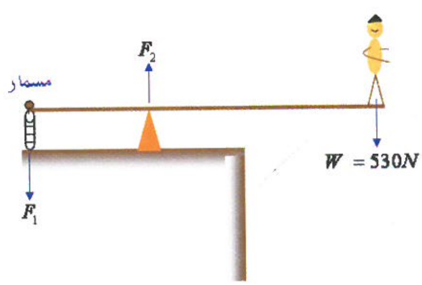
$$\sum F_x = 0 \qquad (10-6)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad (10-7)$$

وأيضا محصلة العزوم على الجسم حول أي نقطة تساوي صفراً، أي أن :

$$\sum \tau = 0 \qquad (10-8)$$

مثال: شخص وزنه $530N$ يمارس رياضة السباحة حيث يقف على النهاية اليمنى للوح السباحة الذي طوله $5.3m$. بفرض أن اللوح عديم الكتلة وأنه مثبت بواسطة مسمار مصومل في نهايته اليسرى ويرتكز على قاعدة ارتكاز تبعد مسافة $1.4m$ عن نهايته اليسرى (انظر الشكل)، أوجد مقدار القوى F_1 ، F_2 المؤثرة على اللوح بواسطة كل من المسمار وقاعدة الارتكاز.



الحـل:

في حالة الاتزان:

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_1 + F_2 - 530 = 0..............(1)$$

وأيضا:

$$\sum \tau = 0$$

ولكون محور الدوران يمر في النهاية اليسرى للوح فان:

$$F_2(1.4) - 530(5.3) = 0...............(2)$$

نلاحظ أن الحد الأول في المعادلة (2) يكون موجباً لأنّ F_2 تسبب دوراناً للوح بعكس عقارب الساعة، وفي المقابل فان الحد الثاني في المعادلة (2) سالباً كون الوزن W يسبب دوران باتجاه عقارب الساعة. أيضاً القوة F_1 لا تسبب عزماً لأن ذراع تأثيرها يساوي صفراً حول محور الدوران المار بها.

من المعادلة (2) نحصل على:

$$F_2 = 2006.4N$$

التعويض في (1) نحصل على:

$$F_1 = 1476.4N$$

ملاحظات:

- محور الدوران اختياري ويكون مجموع العزوم الخارجية في حالة الاتزان صفرا بغض النظر عن محور الدوران الذي تم اختياره (اعتماده).

- اختيار اتجاه قوة مجهولة بشكل خاطئ ينتج عنه قيمة سالبة للقوة عند حسابها وهذا لا يتسبب في أي ضرر علمي.

- مركز الكتلة (مركز الثقل) لجسم صلب والذي يتم اعتبار (أخذ) وزن الجسم الصلب عنده يمكن تحديده كما هو موضح في البند اللاحق.

(٢-١-٠) مركز الكتلة:

يعرّف مركز الكتلة لنظام ميكانيكي (جسم أو مجموعة أجسام) بأنّه النقطة التي تكون عندها الكتلة الكلية للنظام مساوية لكتلة نقطية واحدة موجودة في تلك النقطة. وتكمن أهمية تحديد هذه النقطة في تسهيل دراسة ووصف الحركة. فمثلاً إذا كانت محصلة القوى الخارجية $\vec{F}$ المؤثرة على نظام كتلته الكلية M فإنّ مركز الكتلة لهذا النظام يتحرك بتسارع $\vec{a} = \vec{F}/M$ وهذا يكافئ تسارع نقطة جسيميه واحدة كتلتها M موضوعة في مركز الكتلة للنظام وتحت تأثير محصلة قوى خارجية $\vec{F}$.

وبفرض أنّ النظام موجود في مجال الجاذبية الأرضية فإنّ كل جزء من أجزاء هذا النظام تؤثر عليه قوة الجاذبية الأرضية، أي أنّ له وزن، ويكونّ التأثير الكلي لجميع هذه القوى مساوياً تأثير قوة واحدة $M\vec{g}$، حيث $\vec{g}$ عجلة الجاذبية الأرضية، تؤثر في نقطة ذات أهمية خاصّة تسمى مركز الجاذبية (الثقل). وباعتبار مجال الجاذبية منتظماً فإنّ $\vec{g}$ تكون ثابتة لجميع أجزاء النظام، وبذلك فإنّ مركز الثقل يتطابق مع مركز الكتلة. ويفيد هذا، على سبيل المثال لا الحصر، في حساب العزم (عزم القوة، عزم الدوران) حول محور دوران ما والناجم عن وزن الجسم.

لإيجاد إحداثيات مركز الكتلة $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ لمجموعة جسيمات ذات توزيع كتلي منفصل كتلها m_1 , m_2 ,....., m_n وإحداثيات مواضعها $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_n, y_n, z_n)$ على التوالي فإننا نستخدم التعريفات :

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (10\text{-}10)$$

$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (10\text{-}11)$$

$$\bar{z} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (10\text{-}12)$$

وبمعرفة $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ يتم تحديد موقع (موضع) مركز الكتلة.

مثال: جسيمان الأول كتلته m_1 موضوع في نقطة الأصل والثاني كتلته m_2 موضوع عند $(d, 0, 0)$ أي على الإحداثي السيني. اوجد مركز الكتلة.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$\bar{x} = \frac{m_1(0) + m_2(d)}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{x} = \frac{m_2d}{m_1 + m_2}$$

وبالطبع فان $\bar{y} = 0$ وكذلك $\bar{z} = 0$.

إذا كانت $m_1 = 2m_2$ فان:

$$\bar{x} = \frac{1}{3}d$$

وإذا كانت $m_1 = m_2$ فان $\bar{x} = \frac{1}{2}d$ أي أن مركز الكتلة يكون في منتصف المسافة بين الكتلتين.

وإذا كانت مجموعة الجسيمات في مستوى (المستوى السيني الصادي مثلاً) فان $\bar{z} = 0$ ويمكن إيجاد $\bar{x}$, $\bar{y}$ باستخدام العلاقات السابقة.

ورياضياً يمكن أيضاً كتابة العلاقات السابقة :

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad (10-13)$$

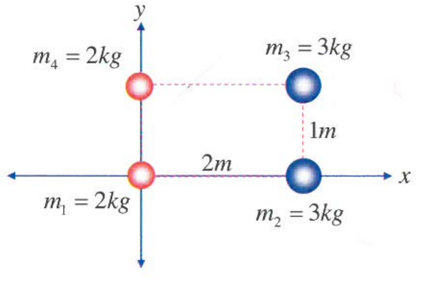
$$\bar{y} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad (10-14)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \qquad (10-15)$$

حيث M : الكتلة الكلية لمجموعة الجسيمات.

N : عدد الجسيمات (الكتل).

مثال: أوجد إحداثيات مركز الكتلة للنظام في الشكل أدناه والذي يتكون من أربع كتل وضعت على رؤوس مستطيل طوله $2m$ وعرضه $1m$ في المستوى السيني- الصادي.



الحل:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{(2)(0)+(3)(2)+(3)(2)+(2)(0)}{2+3+3+2} = 1.2m$$

$$\bar{y} = \frac{(2)(0)+(3)(0)+(3)(1)+(2)(1)}{2+3+3+2} = 0.5m$$

ولإيجاد موقع (إحداثيات) مركز الكتلة لتوزيع كتلي متصل كجسم صلد مثلاً، فمن المعلوم انه وبالمعالجة الرياضية الصحيحة يتم استبدال المجموع ($\sum$) بتكامل ($\int$)واستبدال الكتلة m بعنصر كتلة dm وتصبح العلاقات أعلاه:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int x dm \qquad (10\text{-}16)$$

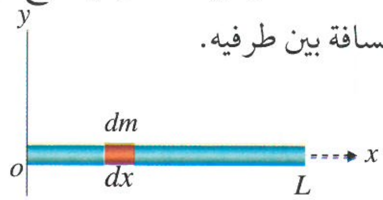
$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int y dm \qquad (10\text{-}17)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int z dm \qquad (10\text{-}18)$$

وتجدر الإشارة إلى أن مركز الكتلة للأجسام المتماثلة والمتجانسة يقع على محور التماثل وفي المركز الهندسي للجسم، فمثلاً مركز الكتلة لقضيب متجانس يكون في منتصفه.

مثـال: اثبت أن مركز الكتلة لقضيب منتظم كتلته M وطوله L، وموضوع على الإحداثي السيني، يقع في منتصف المسافة بين طرفيه.

الحـل:



من التماثل نرى أن $\bar{y}=0$ وأيضا $\bar{z}=0$ ولإيجاد $\bar{x}$ نستخدم العلاقة:

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int x\,dm$$

ولمعرفة علاقة dm بالمتغير x، إن وجدت، فإننا نستخدم النسبة والتناسب:

$$L \rightarrow \mathrm{M}$$

$$dx \rightarrow \mathrm{dm=?}$$

فنحصل على: $dm=\frac{M}{L}dx$ ولكون القضيب متجانس فان الكمية الثابتة $\frac{M}{L}$ تعرف بالكثافة الكتلية الطولية ويرمز لها بالرمز λ وتلفظ لمدا Lambda، وعليه يكون:

$$dm=\lambda dx$$

وبالتعويض في علاقة $\bar{x}$:

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int x\,\lambda dx=\frac{\lambda}{M}\int_0^L x\,dx$$

$$\bar{x}=\frac{\lambda}{M}\left[\frac{x^2}{2}\right|_0^L$$

$$\bar{x}=\frac{\lambda L^2}{2M}$$

وبتعويض $\lambda = \frac{M}{L}$ نحصل على:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}L$$

أي أن مركز الكتلة، ونتيجة للتماثل، يكون في منتصف القضيب.

ومع سهولة تعريفات مركز الكتلة للأجسام الصلدة إلا أن إجراء التكاملات لا يكون عادة سهلاً. وحتى تكتمل الفائدة، فإننا أضفنا ملحق 4 والذي يبيّن بعض الأجسام الصلدة ومركز الكتلة لكل منها تاركين للطالب مجالاً للتأكد من صحتها.

وبإدخال مبدأ مركز الكتلة سيكون لدينا معرفة إضافية في قانون حفظ كمية الحركة، فمثلاً ومن العلاقة السابقة:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (10\text{ - }19)$$

فانه يمكن حساب مركز الكتلة لكتلتين موضوعتين على محور السينات.

ولنعرف كيفية ارتباط مركز الكتلة بقانون حفظ كمية الحركة، دعنا نأخذ حالة تصادم كرتين حيث تحركت الأولى مسافة Δx_1 والثانية مسافة Δx_2 وذلك خلال فترة زمنية Δt فانه يكون :

$$\Delta\bar{x} = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2} \qquad (10\text{ - }20)$$

وبقسمة الطرفين على Δt واخذ النهاية (نهـــا) Limit عندما $(\Delta t \to 0)$ نحصل على:

$$\bar{v} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (10 - 21)$$

حيث v_1 , v_2 , $\bar{v}$ هي السرعة اللحظية لـ m_1 , m_2 ، مركز الكتلة على التوالي. وهذه العلاقة تبين أن $\bar{v}$ لا تتغير خلال التصادم لكون كمية الحركة الكلية $(m_1 v_1 + m_2 v_2)$ محفوظة خلال التصادمات في حالة عدم وجود محصلة قوى خارجية.

أيضاً فان هذه العلاقة تبين أن كمية الحركة الكلية تساوي حاصل ضرب الكتلة الكلية في سرعة مركز الكتلة :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\bar{v}} \qquad (10 - 22)$$

أي أن :

$$\vec{P} = M\vec{\bar{v}} \qquad (10 - 23)$$

وبأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\,\frac{d\vec{\bar{v}}}{dt} \qquad (10 - 24)$$

ونلاحظ أنه عندما تكون $\frac{dP}{dt} = \vec{F} = 0$ فان $\vec{P}$ تكون ثابتة وهذا يعني أن $\vec{\bar{v}}$ تكون ثابتة أيضاً.

ومن الأمثلة التطبيقية لذلك حالة انحلال (انقسام) نواة اليورانيوم ^{238}U في النشاط الإشعاعي التلقائي الى نواة ثوريوم ^{234}Th ونواة هيليوم ^{4}He (جسيم إلفا α) حيث أن كمية الحركة الكلية للنظام قبل الانقسام (التصادم) تكون صفراً وعليه فان كمية الحركة الكلية بعد الانقسام تساوي صفر أيضاً.

وعليه فإنه إذا عرفت سرعة إحدى الأجزاء (الشظايا) فانه يمكن حساب السرعة الارتدادية للآخر.

قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية حول محور ثابت:

بالمقارنة مع قانون نيوتن الثاني في الحركة الانتقالية:

$$\sum \vec{F} = \left(\sum m\right) \vec{a} \qquad (10-25)$$

حيث $\sum \vec{F}$: مجموع القوى الخارجية المؤثرة على النظام (الكتل).

$\sum m$: مجموع الكتل في النظام.

$\vec{a}$: تسارع النظام (التسارع الخطي أو الانتقالي للنظام).

فان قانون نيوتن الثاني المماثل في الحركة الدورانية يكون :

$$\sum \tau = \left(\sum m r^2\right)\alpha \qquad (10-26)$$

أو

$$\sum \tau = I\alpha \qquad (10-27)$$

حيث $\sum \tau$: مجموع العزوم الخارجية المؤثرة على النظام حول محور ما.

I: عزم القصور الذاتي للنظام، والصيغة الرياضية له $I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ وبجدر التنبيه أن هذا التعريف للتوزيع الكتلي المنفصل. وتكون N عدد الكتل (الجسيمات في النظام).

r : المسافة العمودية أو بعد كل كتلة عن محور الدوران، فمثلا r_1 هي بعد الكتلة m_1 عن محور الدوران. وتكون وحدة I في النظام العالمي للوحدات هي $kg.m^2$.

α : عجلة النظام الزاوية (الدورانية).

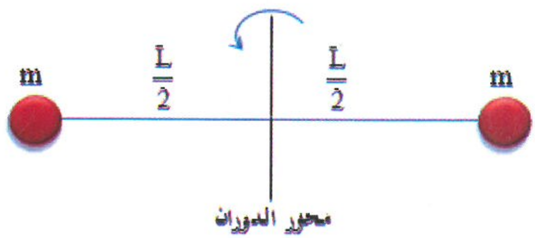
مثال: كتلتان متماثلتان $(m_1 = m_2 = m)$ مثبتتان على نهايتي قضيب عديم الكتلة طوله L. احسب عزم القصور الذاتي عندما يكون محور الدوران عمودي على القضيب عند :

١- منتصفه (مركزه).

٢- إحدى نهايتي القضيب.

الحـل:

١ -



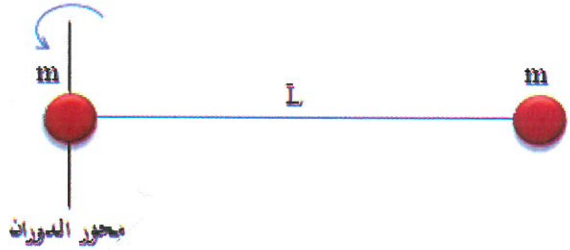
$$I=\sum_{i=1}^{2} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I=m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2+m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I=m\frac{L^2}{4}+m\frac{L^2}{4}$$

$$I=\frac{1}{2}mL^2$$

٢ -



$$I=m_1(L)^2+m_2(0)^2$$

$$I=mL^2$$

وحيث أن I في الحالة الأولى اقل من I في الحالة الثانية فان الحركة الدورانية في الحالة الأولى تكون أسهل. أي أن I تعبر عن مدى ممانعة الجسم أو النظام للحركة الدورانية.

وباستخدام حساب التكامل يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي I للأجسام الصلبة ذات التوزيع الكتلي المتصل حيث تعتمد I عادة على كتلة الجسم، شكل (أبعاد) الجسم، موقع واتجاه (توجيه) محور الدوران. فمثلا لقضيب منتظم طوله L وكتلته M فان عزم القصور الذاتي له حول محور عمودي على مركزه يكون $I = \frac{1}{12}ML^2$ بينما حول محور عمودي على إحدى نهايتيه فان $I = \frac{1}{3}ML^2$ وسنبين إثبات ذلك في ملحق 5 والذي يتضمن أيضا عزم القصور الذاتي لأجسام صلبة أخرى والأكثر شيوعا في المسائل الفيزيائية. وإذا ذكر فقط عزم القصور الذاتي لجسم فإن ذلك يعني ضمنياً أن محور الدوران عمودي على مركز الكتلة.

ولتسهيل تذكر الكميات الفيزيائية الدورانية، والأقل شيوعاً واستخداماً عند الطالب، ومفاهيمها فإننا نربطها بما يناظرها من الكميات الفيزيائية الخطية (الانتقالية) والتي عادة تكون مألوفة واعتيادية لدى الطالب. والجدول التالي يبين التناظر بين المفاهيم الدورانية و الانتقالية.

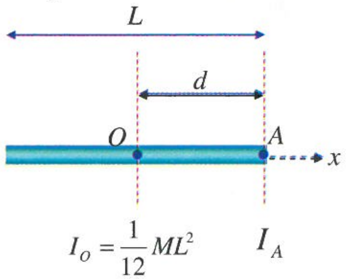
التشابه (التناظر) بين المفاهيم الفيزيائية في حالتي الحركة الانتقالية والدورانية		
الكمية الفيزيائية (المفهوم الفيزيائي)	الحركة الانتقالية	الحركة الدورانية
الإزاحة	s	θ
السرعة	v	ω
التسارع	a	α
مسبب التسارع	F	τ
قانون نيوتن الثاني	$\sum F = ma$	$\sum \tau = I\alpha$
الشغل	Fs	$\tau\theta$
طاقة الحركة	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
الزخم	$P = mv$	$L = I\omega$

نظرية المحاور المتوازية :

تنص هذه النظرية على أن عزم القصور الذاتي لجسم صلب (صلد، جاسىء) I_A حول أي محور يمر في نقطة ما يساوي عزم القصور الذاتي حول محور موازي له ويمر في مركز الكتلة I_O مضافاً إليه حاصل ضرب كتلة الجسم M في مربع المسافة العمودية d بين المحورين، أي أن:

$$I_A = I_O + Md^2 \qquad (10-28)$$

فمثلاً فان عزم القصور الذاتي لقضيب منتظم طوله L وكتلته M حول محور عمودي على مركزه يساوي $\frac{1}{12}ML^2$ أي أن $I_O = \frac{1}{12}ML^2$ وباستخدام نظرية المحور المتوازية فإن عزم القصور الذاتي للقضيب حول محور عمودي على إحدى نهايتيه I_A يكون:



شكل (٢-١٠):
نظرية المحاور المتوازية

$$I_A = I_O + Md^2 \qquad (10-29)$$

$$I_A = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \qquad (10-30)$$

$$I_A = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (10-31)$$

أي أن I_O اقل من I_A مما يعني أن دوران القضيب يكون أسهل حول المحور العمودي على المركز.

تساؤل : إذا علمت أن عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم كتلته M ونصف قطره R حول محور عمودي يمر في مركزه يساوي $\frac{1}{2}MR^2$، بين أن عزم القصور الذاتي للقرص حول محور عمودي على حافته يساوي ثلاثة أضعاف عزم القصور له حول المحور العمودي المار في مركزه.

(١٠-٣) الشغل الدوراني والطاقة:

الشغل الدوراني W_R المبذول بواسطة عزم ثابت τ لدوران جسم زاوية θ يعطى بالعلاقة :

$$W_R = \tau\theta \qquad (10\text{-}32)$$

ووحدة الشغل الدوراني في النظام العالمي هي أيضا الجول (J)، وتكون وحدة θ بالريديان. ويجدر التذكير بأنّ هذه العلاقة تناظر علاقة تعريف الشغل في الحركة الانتقالية والناجم عن قوة مقدارها F تؤثّر على جسم وتعمل على إزاحته مسافة مقدارها s في نفس اتجاه تأثير القوة.

طاقة الحركة الدورانية:

في نظرية الشغل والطاقة رأينا أن الشغل المبذول بواسطة محصلة القوى الخارجية يتسبب في تغير في طاقة الحركة الانتقالية وبطريقة مماثلة فان الشغل المبذول بواسطة محصلة العزوم الخارجية يسبب تغير في طاقة الحركة الدورانية. ويمكن تعرف طاقة الحركة الدورانية باستخدام تعريف طاقة الحركة الانتقالية:

$$KE_R = \sum \frac{1}{2} m v^2 \qquad (10\text{-}33)$$

وحيث أن $v = r\omega$ فان:

$$KE_R = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)\omega^2 \qquad (10\text{-}34)$$

$$KE_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (10\text{-}35)$$

وتكون وحدة طاقة الحركة الدورانية أيضا الجول (J).

وإذا حدث أن ترافقت حركة دورانية لجسم حول محوره مع حركة خطية له كما هو الحال في الدحرجة، كحركة عجلة متدحرجة على مستوى أفقي ودون تزحلق، فان طاقة الحركة الكلية تكون مجموع طاقتي الحركة الانتقالية و الدورانية :

$$KE_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (10-36)$$

حيث m : كتلة الجسم.

v : السرعة الانتقالية لمركز كتلة (ثقل) الجسم.

I : عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على مركز كتلة الجسم.

ω : السرعة الزاوية للجسم .

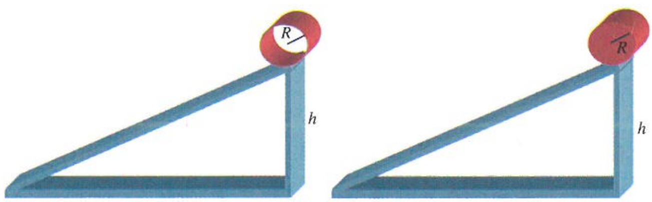
وإذا تدحرجت العجلة من ارتفاع معين على سطح مائل فان الطاقة الميكانيكية الكلية لها عند نقطة ما ترتفع مسافة h بالنسبة لمستوى إسناد اختياري، طاقة الوضع له صفر، تكون:

$$KE_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh \qquad (10-37)$$

ويمكن تطبيق مبدأ (قانون) حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية عند غياب قوى الإخماد كالاحتكاك مثلاً، أي أنّ :

$$E_f = E_i \qquad (10-38)$$

مثـال: اسطوانة فارغة واسطوانة مصمتة لهما نفس نصف القطر ونفس الكتلة أفلتتا من قمة مستوى مائل ومن نفس النقطة (من نفس الارتفاع). إذا علمت أن عزم القصور للاسطوانة الفارغة يساوي mR^2 وان عزم القصور للاسطوانة المصمتة يساوي $\frac{1}{2}mR^2$، أيهما تصل نهاية المستوى المائل أولاً ؟



الحـل:

باستخدام قانون حفظ الطاقة الميكانيكية:

$$E_f = E_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 + mgh_i$$

ولكون $h_f = 0$، $v_i = 0$، $\omega_i = 0$ فان المعادلة السابقة تصبح :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 = mgh_i$$

وبفرض أن الحركة تدحرجيه فقط فان:

$$\omega_f = \frac{v_f}{R}$$

وعليه يكون:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_f}{R}\right)^2 = mgh_i$$

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 = 2mgh_i$$

أو:

$$v_f = \sqrt{\frac{2mgh_i}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

وبتعويض $I = mR^2$ للاسطوانة الفارغة نحصل على:

$$v_f = \sqrt{gh_i}$$

أيضا ولكون $I = \frac{1}{2}mR^2$ للاسطوانة المصمتة نحصل على:

$$v_f = \sqrt{\frac{4}{3}gh_i} = 1.155\sqrt{gh_i}$$

وعليه فإن الاسطوانة المصمتة تصل أولاً لأن سرعتها الانتقالية أكبر.

تساؤل: اسطوانة مصمتة وكرة مصمتة لهما نفس نصف القطر ونفس الكتلة أفلتتا من قمة مستوى مائل ومن نفس النقطة (من نفس الارتفاع). إذا علمت أن عزم القصور للكرة المصمتة يساوي $\frac{2}{5}mR^2$، أيهما تصل نهاية المستوى المائل أولاً؟

كمية الحركة الزاوية :

مقارنة بتعريف كمية الحركة الخطية (الانتقالية) لجسم:

$$\vec{P} = m\vec{v} \qquad (8 - 1)$$

فان كمية الحركة الزاوية $\vec{L}$ حول محور ثابت تعطى بالعلاقة :

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} \qquad (10 - 39)$$

حيث L : كمية الحركة الزاوية.

I : عزم القصور الذاتي للجسم.

ω : السرعة الزاوية للجسم.

وهذا يعني أن كمية الحركة الزاوية لجسم صلد (صلب) يدور حول محور دوران ثابت، وعمودي على الجسم الصلد، يساوي حاصل ضرب عزم القصور الذاتي للجسم حول محور الدوران مضروبا في السرعة الزاوية لجسم. وتكون وحدة كمية الحركة الزاوية في النظام العالمي للوحدات هي $kg.m^2/s$.

وعند دراستنا لكمية الحركة الخطية بينا انه عندما تكون محصلة القوى الخارجية المؤثرة على نظام تساوي صفرا فان كمية الحركة الخطية للنظام تكون محفوظة، أي أن:

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i \qquad (8 - 20)$$

والصيغة التفاضلية لقانون نيوتن الثاني $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ تؤكد ذلك.

وبالمثل فإنه عندما تكون محصلة العزوم الخارجية المؤثرة على نظام حول محور ما تساوي صفراً فان كمية الحركة الزاوية له تكون محفوظة، أي أن :

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i \qquad (10-40)$$

وهذا هو مبدأ حفظ (ثبوت) كمية الحركة الزاوية (الدورانية). والصيغة التفاضلية $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ تؤكد ذلك أيضاً.

وفي حال معرفة موضع جسيم $\vec{r}$ وكمية حركته الخطية $\vec{P}$ بالنسبة إلى نقطة الأصل مثلاً، بدلالة متجهات الوحدة العمودية $(\hat{k}, \hat{j}, \hat{i})$ فإننا ولإيجاد كمية الحركة الزاوية (عزم كمية الحركة، الزخم الزاوي) $\vec{L}$ حول نقطة الأصل نستخدم التعريف:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \qquad (10-41)$$

وتكون $\vec{L}$ عمودية على مستوى $\vec{P}, \vec{r}$.

ومن تعريف الضرب ألاتجاهي فإنّ:

$$L = rP\sin\theta \qquad (10-42)$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{P}, \vec{r}$.

ويمكن وضع العلاقة أعلاه على الصورة:

$$L = r(P\sin\theta) \qquad (10-43)$$

حيث $P\sin\theta$ هي مركبة كمية الحركة المعامدة لمتجه الموضع $\vec{r}$.

كما يمكن أيضاً وضعها على الصورة:

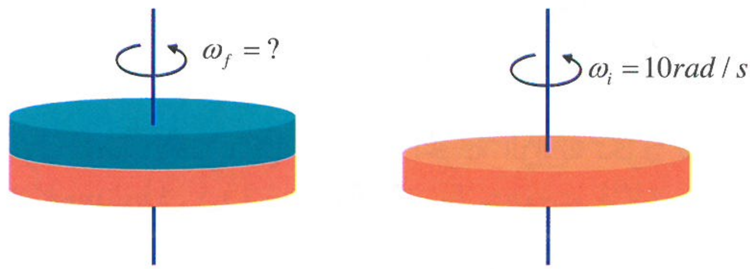
$$L = (r \sin\theta)P \qquad (10-44)$$

حيث $r \sin\theta$ هي مركبة متجه الموضع المعامدة للمتجه $\vec{P}$ أو امتداده.

ويجدر ملاحظة أنّه ولكي يكون للجسيم كمية حركة زاوية لا يشترط أن يدور الجسيم حول نقطة الأصل، كما أنّ كمية الحركة الزاوية تكون صفراً عندما $\theta = 0^o$ أو $\theta = 180^o$.

أمثلة محلولة

مثال١: قرص يدور بسرعة $10rad/s$، وضع فوقه قرص آخر له نفس الكتلة والشكل فأصبح القرصان يدوران معاً. احسب السرعة الزاوية لهما.



الحل:

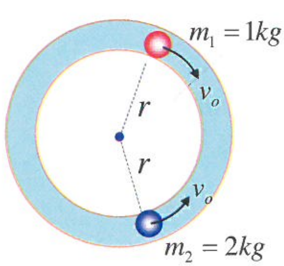
نفترض أن عزم القصور الذاتي للقرص الأول حول محور الدوران العمودي على مركزه I_o، و عند وضع قرص مماثل له يدور حول نفس المحور يصبح العزم $2I_o$، وبتطبيق مبدأ حفظ كمية الحركة الزاوية:

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i$$

$$2I_o\omega_f = I_o\omega_i$$

$$\omega_f = \frac{1}{2}\omega_i = \frac{10}{2} = 5rad/s$$

مثال٢: كرتان كتلتيهما $1kg$، $2kg$ تتحركان باتجاه بعضهما في مسار دائري بسرعة v_o فتصطدمان وتتحركان معاً. أوجد سرعتيهما بعد التصادم.



الحل:

كمية الحركة الزاوية تعطى بالعلاقة :

$$L = I\omega = I\left(\frac{v}{r}\right)$$

$$L = I\omega = mr^2\left(\frac{v}{r}\right) = mrv$$

وعليه فإن كمية الحركة الزاوية الابتدائية للكرة الأولى: $L_{1i} = -(1)v_o r$

والإشارة السالبة لأنها تتحرك باتجاه عقارب الساعة.

وكمية الحركة الزاوية الابتدائية للكرة الثانية: $L_{2i} = (2)v_o r$

أما كمية الحركة للكرتين بعد التصادم فتصبح:

$$L_f = I\omega = mr^2\left(\frac{v_f}{r}\right) = 3rv_f$$

و بتطبيق قانون حفظ كمية الحركة الزاوية:

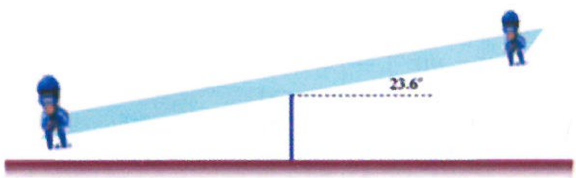
$$\vec{L}_f = \vec{L}_i$$

$$3rv_f = -rv_o + 2rv_o$$

$$3rv_f = rv_o$$

$$v_f = \frac{v_o}{3}$$

مثال٣: في لعبة الأطفال (سي سو) إذا كان طول الذراع الكلي $4.17m$ وجلس طفل كتلته $29.3kg$ على أحد أطرافها فمال الذراع بزاوية 23.6^0 عن مستوى الأرض (المستوى الأفقي). ما هي كتلة الطفل الأكبر الذي يجلس على الطرف الآخر إذا كان العزم الكلي حول المركز $153.5N.m$؟



الحل:

العزم الناتج عن وزن الطفل الأصغر τ_1 :

$$\tau_1 = m_1 g\left(\frac{\ell}{2}\right)\sin 66.4^o$$

$$\tau_1 = -(29.3)(9.8)\left(\frac{4.17}{2}\right)\sin 66.4^o = -548.6N.m$$

والإشارة السالبة لأن الدوران باتجاه عقارب الساعة.

والعزم الناتج عن وزن الطفل الأكبر τ_2 :

$$\tau_2 = m_2 g\left(\frac{\ell}{2}\right)\sin 113.6^o$$

$$\tau_2 = m_2(9.8)\left(\frac{4.17}{2}\right)\sin 113.6^o = 18.7m_2$$

محصلة العزوم τ :

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$153.5 = -548.6 + 18.7m_2$$

$$18.7m_2 = 702.1$$

$$m_2 = 37.5kg$$

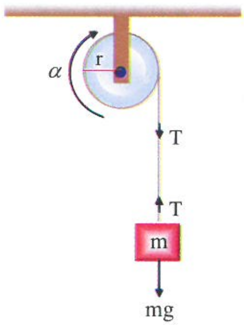
مثال٤: إذا نقص عزم القصور الذاتي لجسم يدور حول محوره إلى نصف قيمته الأصلية، ما هي النسبة بين طاقة حركته الدورانية الجديدة وطاقة حركته الأصلية (الابتدائية)؟

الحل:

$$\frac{KE_{R_f}}{KE_{R_i}} = \frac{\frac{1}{2}I_f\,\omega_f^2}{\frac{1}{2}I_i\,\omega_i^2}$$

وباستخدام العلاقة $L = I\omega$ نحصل على:

$$\frac{KE_{R_f}}{KE_{R_i}} = \frac{\frac{L^2}{2I_f}}{\frac{L^2}{2I_i}} = \frac{I_i}{I_f} = 2$$



مثال٥: كتلة $m = 400g$ معلقة من حافة بكرة نصف قطرها $r = 15cm$. عندما أفلتت الكتلة فإنها تحركت إلى أسفل مسافة $2m$ خلال $6.5s$. اوجد عزم القصور الذاتي للبكرة.

الحل:

لحساب التسارع الخطي a للكتلة المعلقة، نطبق إحدى معادلة الحركة الخطية المستقيمة:

$$y = v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{2y}{t^2} = \frac{2(2)}{(6.5)^2} = 0.095m/s^2$$

فيكون التسارع الخطي للكتلة المعلقة يساوي التسارع الخطي لنقطة على حافة البكرة.

نحسب التسارع الزاوي α:

$$a = \alpha r$$

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{0.095}{0.15} = 0.63rad/s^2$$

نطبق قانون نيوتن الثاني على الكتلة المعلقة لحساب قوة الشد في الحبل T :

$$mg - T = ma$$

$$T = m(g - a)$$

$$T = (0.40)(9.8 - 0.095) = 3.88N$$

وعليه يكون عزم قوة الشد T على البكرة حول محور دورانها:

$$\tau = I\alpha$$

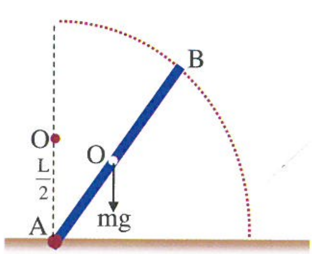
وبما أن المسافة العمودية بين قوة الشد ومحور الدوران هي r فإن:

$$Tr = I\alpha$$

$$I = \frac{Tr}{\alpha}$$

$$I = \frac{(3.88)(0.15)}{0.63} = 0.92kg.m^2$$

مثال٦: قضيب رفيع منتظم AB كتلته M وطوله L مثبت بفصّالية في النقطة A بأرضية أفقية. في البداية كان القضيب عموديا ثم سمح له بالسقوط الى الأرض (انظر الشكل). ما هي سرعته الزاوية عندما يصطدم بالأرض؟



الحـل:

عزم القصور الذاتي حول محور عمودي يمر في نهاية القضيب A ، وباستخدام نظرية المحاور المتوازية، تكون:

$$I_A = I_O + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_A = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

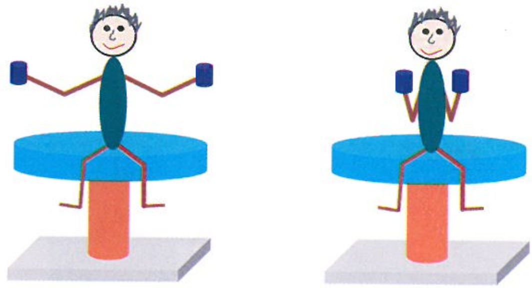
عندما يسقط القضيب فإن مركز كتلته يتحرك مسافة عمودية $\left(\frac{L}{2}\right)$ وعليه، باستخدام قانون حفظ الطاقة، فإن:

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

مثـــال٧: يجلـــس شـــخص عـــلى منصـــة تـــدور بحريـــة بســـرعة دورانيـــة $0.25 rev / s$ ويـــداه ممـــدودتان، وعنـــدما يرجـــع يـــداه (يضـــمهما) الى جســـمه فـــان سرعـــة الـــدوران تصـــبح $0.80 rev / s$. أوجـــد النسبة في عزم القصور له بين الحالتين الأولى والثانية.



الحـل:

بتطبيق قانون حفظ كمية الحركة الزاوية فإن:

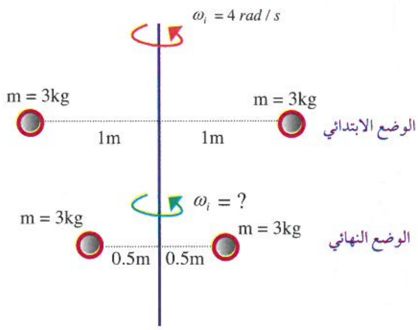
$$L_i = L_f$$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\frac{I_i}{I_f} = \frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{0.80}{0.25} = 3.2$$

مثـال٨: جسيمان كتلة كل منهما $3kg$ المسافة بينهما $2m$ ويدوران في المستوى الأفقي بسرعة $4rev/s$ حول محور يمر من منتصف المسافة بينهما بشكل رأسي . إذا اقتربا الجسيمان من بعضهما بحيث أصبحت المسافة بينهما $1m$

(كل جسم يبعد $0.5m$عن محور الدوران). احسب السرعة الزاوية النهائية لهما بفرض عدم وجود الاحتكاك.



الحل:

$$\omega = 4\frac{rev}{s}\left(2\pi\frac{rad}{rev}\right) = 8\pi = 25.1rad/s$$

بتطبيق قانون حفظ كمية الحركة الزاوية:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$I_{1i}\omega_i + I_{2i}\omega_i = I_{1f}\omega_f + I_{2f}\omega_f$$

$$mr_i^2\omega_i + mr_i^2\omega_i = mr_f^2\omega_f + mr_f^2\omega_f$$

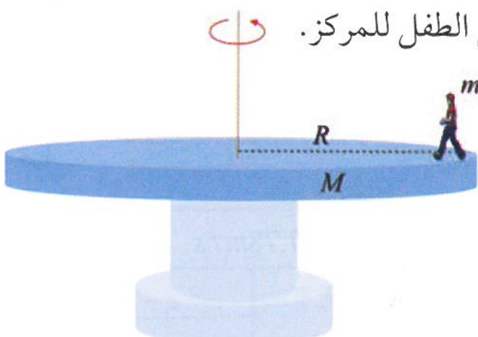
$$2mr_i^2\omega_i = 2mr_f^2\omega_f$$

$$r_i^2\omega_i = r_f^2\omega_f$$

$$\frac{\omega_f}{\omega_i} = \sqrt{\frac{r_i}{r_f}}$$

$$\omega_f = \omega_i\sqrt{\frac{r_i}{r_f}} = 25.1\sqrt{\frac{1}{0.5}} = 35.5rad/s$$

مثال٩: مستوى أفقي على شكل قرص دائري يدور حول محور رأسي بدون احتكاك Merry-Go-Round (انظر الشكل). طفل كتلته $35kg$ يقف على حافة القرص الذي كتلته $M = 175kg$ ونصف قطره $2m$ ويتحرك ببطء من حافة القرص باتجاه المركز (محور الدوران). إذا كانت السرعة الزاوية للنظام $2.5rad/s$ عندما كان الطفل على حافة القرص، احسب السرعة الزاوية للنظام عندما يصل الطفل للمركز.



الحل:

بفرض أن عزم القصور للقرص هو I_d وعزم القصور الذاتي للطفل هو I_{ch} وبتطبيق قانون حفظ كمية الحركة الزاوية فإن:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$(I_{di} + I_{chi})\omega_i = (I_{df} + I_{chf})\omega_f$$

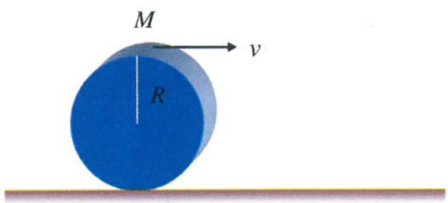
$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + 0\right)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}\omega_0$$

$$\omega_f = \left(\frac{\frac{1}{2}(175)(2)^2 + (35)(2)^2}{\frac{1}{2}(175)^2(2)^2}\right)(2.5) = 3.5rad/s$$

تساؤل: احسب التغير في طاقة الحركة للنظام. هل زادت الطاقة أم قلت وما هو تفسيرك لذلك؟

مثال١٠: قرص كتلته $8kg$ يتحرك بسرعة $v = 100km/h$ دون انزلاق. احسب الطاقة الحركية الكلية له.



الحل:

$$v = 100\frac{km}{h}\left(\frac{1000m}{km}\right)\left(\frac{1h}{3600s}\right) = 27.78m/s$$

يجب ملاحظة أن الحركة هنا تعتبر دحرجة وهي مكونة من دوران القرص حول محور يمر عمودياً في مركزه وحركة انتقالية (خطية) للقرص وعليه فإنّ الطاقة الحركية تتكون من حدّين :

$$KE = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

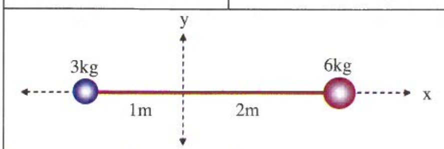
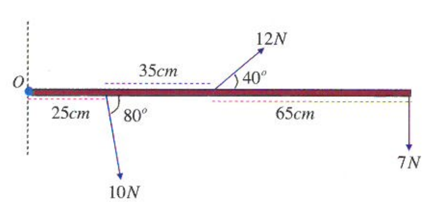
$$KE = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$KE = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$KE = \frac{3}{4}(8)(27.78)^2 = 4630.4J$$

أسئلة وتمارين

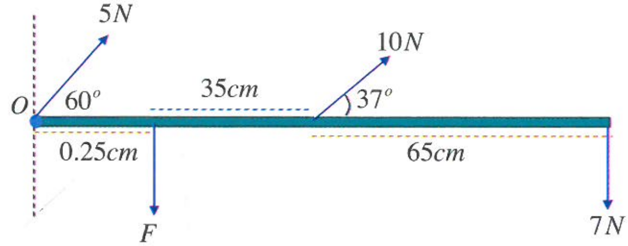
أولا : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١- أثرت قوة مقدارها $65.2N$ عمودياً على طرف لوح فسببت عزم دوران حول الطرف الآخر للوح مقداره $168.868N.m$ ، وعليه فان طول اللوح يساوي:			
أ- $2.59m$	ب - $0.386m$	ج - $109m$	د - $0m$
٢- الإحداثي السيني لمركز الكتلة للنظام المجاور هو :			
أ - $1m$	ب- $-1m$	ج - $1.5m$	د - $0m$
٣- عند فتح باب عرضه $1m$ فإن اقل قوة تلزم تساوي $20N$. احسب أقل قـوة تلزم لفتحه إذا أثرت على بعد $0.4m$ من محور دورانه (فصالية الباب).			
أ- $8N$	ب- $10N$	ج- $40N$	د - $50N$
٤- الشكل المجاور عبارة عن مسطرة طولها $1.25m$ مثبت أحد أطرافها بواسطة مسمار عند النقطة O. احسب العزم الكلى الناتج عن القوى المؤثرة حول النقطة O.			
أ - -1.7 N. m	ب- -15.8 N. m	ج- -6.6 N. m	د- 61 N. m
٥ - يقف شخص على منصة تدور بحرية بسرعة دورانية $0.25rev/s$ ويداه ممدودتان فكان عزم القصور له $8kg.m^2$ ، وعندما يرجع يداه (يضمهما) الى جسمه أصبحت سرعة الدوران له $1rev/s$. احسب عزم القصور للشخص عندما يضم يداه.			
أ- $4kg..m^2$	ب - $2kg.m^2$	ج - $8kg.m^2$	د - $0.5kg.m^2$

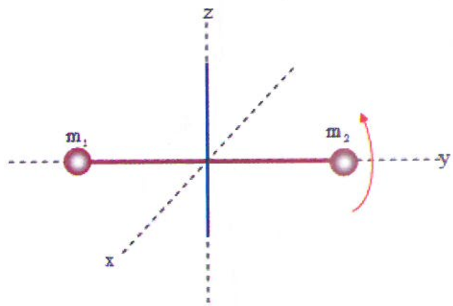
٦- أوجد العزم حول نقطة الأصل الناتج عن القوة $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})N$ والتى تؤثر على النقطة $\vec{r} = (3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})m$.			
أ- $\vec{\tau} = (-7\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k})N.m$	ب- $\vec{\tau} = (-7\hat{i} - 7\hat{j} + 9\hat{k})N.m$	ج- $\vec{\tau} = 7(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})N.m$	د- $\vec{\tau} = (7\hat{i} + 7\hat{j} + -9\hat{k})N.m$
٧- جسيم كتلته $0.01kg$ ومتجه موضعه $\vec{r} = (15\hat{i} + 20\hat{j} - 5\hat{k})m$ ويتحرك بسرعة $\vec{v} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})m/s$. أوجد كمية الحركة الزاوية للجسيم حول نقطة الأصل.			
أ- $\vec{L} = 0.1(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})kg.m^2/s$	ب- $\vec{L} = 0.05(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})kg.m^2/s$	ج- $\vec{L} = (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})kg.m^2/s$	د- $\vec{L} = 0.05(-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})kg.m^2/s$

ثانيــاً:

١- في الشكل المبين أدناه إذا كان العزم الكلي للمسطرة التي طولها $1.25m$ ومثبتة بمسمار عند النقطة O يساوي $-7N.m^2$ حول المحور المار عمودياً بالنقطة O، أوجد مقدار القوة F.



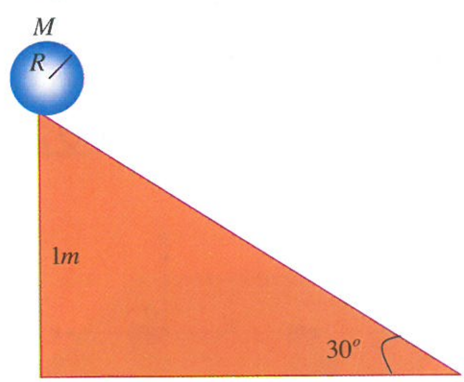
٢ - قضيب صلد كتلته M وطوله ℓ ومثبت على طرفيه كتلتان m_1، m_2 بشكل أفقي (انظر الشكل) يتحرك بسرعة زاوية $\omega_o\ rad/s$. احسب :



أ – كمية الحركة الزاوية للمجموعة.

ب – مقدار التسارع المركزي لكل من الكتلتين.

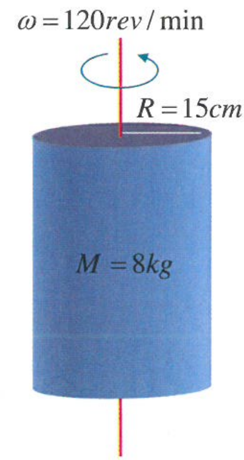
٣ - كرة كتلتها $8kg$ تتدحرج من السكون على سطح مائل (انظر الشكل). احسب:



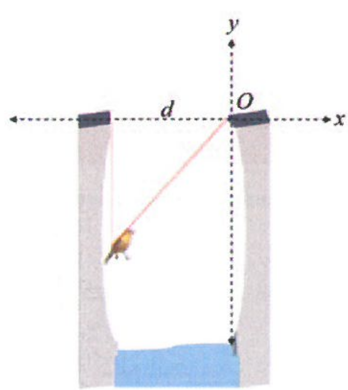
أ - السرعة الخطية لمركز كتلة الكرة عند أسفل السطح المائل.

ب – التسارع الخطي لمركز كتلة الكرة.

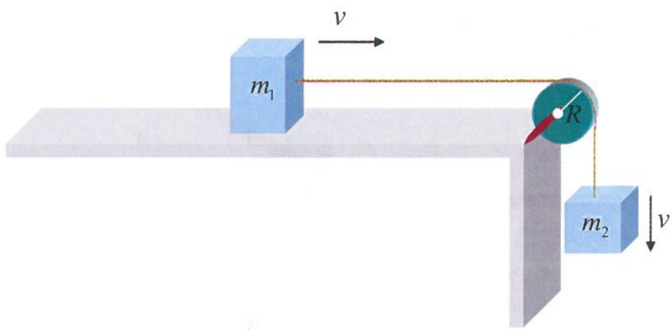
٤ - احسب كمية الحركة الزاوية لاسطوانة كتلتها $M = 8kg$ ونصف قطرها $R = 15cm$ تدور حول محور رأسي بسرعة $120rev/\min$.



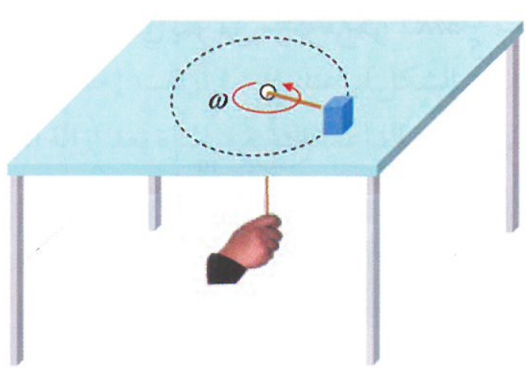
٥ - سقط عصفور كتلته m في بئر كما في الشكل المبين أدناه. احسب كمية الحركة الزاوية له نسبة للنقطة O عند أي زمن t.



٦ – الشكل أدناه يبين جسمين كتلتيهما m_1 ، m_2 مربوطان بحبل خفيف يمر حول بكرة عزم القصور الذاتي لها I_o . إذا تحرك الجسمان معاً كما هو موضح، احسب التسارع الخطي لهما باستخدام العلاقة $\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (أهمل الاحتكاك كلياً).

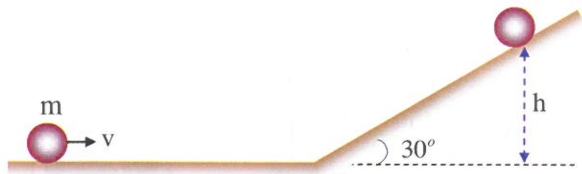


٧ – جسيم كتلته m يتحرك في مسار دائري على سطح طاولة عديمة الاحتكاك مثقوبة من المركز ويكون نصف قطر المسار ثابت بواسطة خيط مربوط أحد أطرافه بالجسم والطرف الآخر يمر من خلال الثقب وتمسكه بيدك . إذا سحبت الخيط بحيث نقص نصف القطر الى النصف، احسب النسبة بين السرعتين الزاوية النهائية والابتدائية.



أسئلة تحدي

١ - كرة مصمتة منتظمة تتدحرج على سطح أفقي بسرعة $20m/s$، واستمرت بالتدحرج أعلى سطح مائل كما هو مبين في الشكل. إذا أهمل الاحتكاك، احسب:



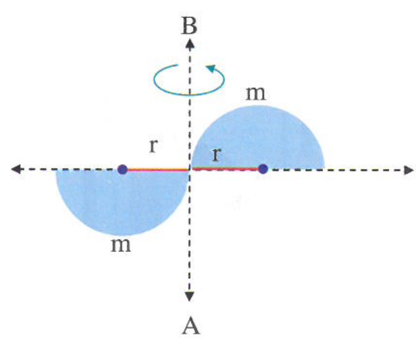
أ- قيمة h حيث تقف الكرة .

ب- قيمة h إذا كانت كتلة الكرة تساوي $2m$.

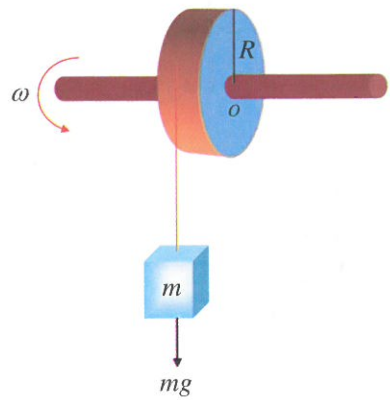
ج- قيمة h إذا كانت زاوية ميلان السطح المائل 20^o بدلا من 30^o .

(تنبيه $I = \frac{2}{5}mr^2$ حول محور عمودي يمر في مركز الكرة المصمتة).

٢ - نصفي كرة مصمتة متماثلان كتلة كل منهما m ونصف قطر كل نصف r مثبتان كما في الشكل المبين أدناه. احسب عزم القصور الذاتي لهما عند دورانهما حول المحور AB علماً بأن عزم القصور لكرة مصمتة كتلتها M ونصف قطرها R حول محور عمودي يمر من مركزها هو $\frac{2}{5}MR^2$.



٣- جسم كتلته $m = 4kg$ مربوط بخيط خفيف ملفوف على بكرة منتظمة اسطوانية الشكل نصف قطرها $R = 8cm$ وكتلتها $M = 2kg$



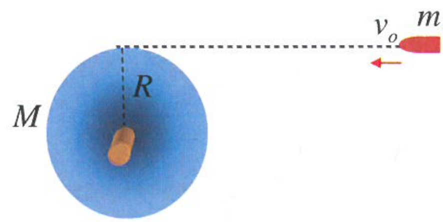
أ- أوجد قيمة (مقدار) محصلة العزوم τ حول النقطة O.

ب- عندما تكون قيمة سرعة الجسم v والسرعة الزاوية للبكرة ω $(\omega = v/R)$، أوجد قيمة (مقدار) كمية الحركة الزاوية الكلية $\vec{L}$ حول النقطة O.

ج - باستخدام العلاقة $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ونتيجة الفرع (ب)، أوجد قيمة (مقدار) تسارع الجسم.

٤- قضيب صلب (صلد) رفيع منتظم وزنه W مدعوم أفقيا بواسطة دعامتين على نهايتيه (أنظر الشكل). عند $t = 0$ أزيلت إحدى هذه الدعامتين فجأة. أوجد القوة المؤثرة على الداعمة الثانية مباشرة بعد إزالة الداعمة الأولى.

٥ - جسم كتلته $m = 10g$ وسرعته $v_o = 10m/s$ يصطدم ويلتصق بحافة كرة مصمتة منتظمة كتلتها $M = 1kg$ ونصف قطرها $R = 20cm$ (انظر الشكل).
إذا كانت الكرة في حالة سكون ومرتكزة على محور عديم الاحتكاك يمر في مركزها وعمودي على مستوى الورقة،

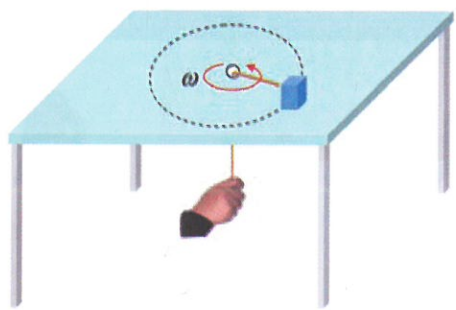


أ- أوجد السرعة الزاوية للنظام بعد التصادم مباشرة.
ب- احسب مقدار الطاقة الضائعة في التصادم.

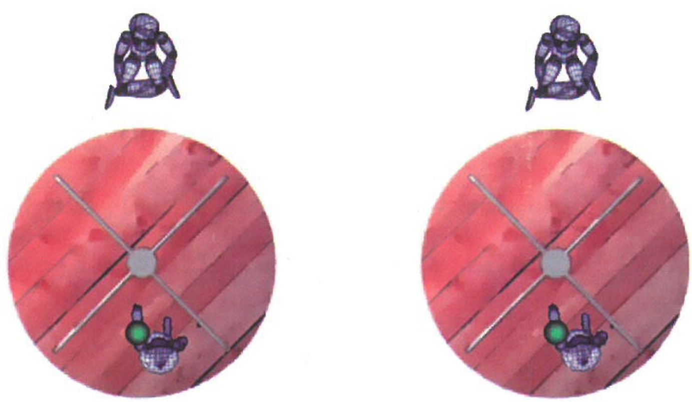
٦ - خيط ملفوف عدة مرات حول حافة حلقة صغيرة نصف قطرها $R = 8cm$ وكتلتها $120g$. إذا كانت النهاية الحرة للخيط مثبتة بواسطة يد شخص وأفلتت الحلقة من السكون (انظر الشكل)، احسب:

أ- الشد في الخيط في حالة حركة الحلقة الى أسفل وانحلال الخيط.
ب- الزمن اللازم للحلقة لتهبط (تتحرك الى أسفل) مسافة $60cm$.
ج- السرعة الزاوية للحلقة بعد هبوطها مسافة $60cm$.

٧ – جسم كتلته $1.0\ kg$ يتحرك في مسار دائري نصف قطره $1\ m$ على طاولة أفقية عديمة الاحتكاك، وبسرعة زاوية $6.28\ rad/s$، والجسم مربوط بخيط مهمل الكتلة يمر خلال ثقب صغير في الطاولة وفي مركز المسار الدائري. يوجد شخص تحت الطاولة يقوم بسحب الخيط إلى أسفل لجعل المسار الدائري للجسم أصغر.



إذا كان أقصى شد يتحمله الخيط هو $150\ N$، ما هو نصف قطر أصغر مسار دائري يمكن أن يتحرك به الجسم؟



الوحدة الحادية عشر

حركة المحاور المرجعية

حركة المحاور المرجعية

- هل هناك فرق في وصف حركة شخص يتحرك داخل قطار نسبة لشخص يجلس معه في نفس القطار ونسبة إلى شخص يقف على الأرض بالقرب من سكة الحديد؟
- كيف يستفيد رجال الفضاء من الحركة الدورانية للأرض؟
- ما هي القوة الحتمية التي تؤثر على جسيم يتحرك حركة دورانية؟

(١١-١) مقدمة:

السرعة النسبية:

إذا تحرك جسم p بالنسبة لهيكل مرجعي B بسرعة يرمز لها عادة بالرمز $\vec{v}_{p/B}$ والذي يتحرك بالنسبة لهيكل مرجعي ثابت A بسرعة يرمز لها عادة بالرمز $\vec{v}_{B/A}$ فان سرعة p بالنسبة للهيكل الثابت A يعطى بالعلاقة:

$$\vec{v}_{p/A} = \vec{v}_{p/B} + \vec{v}_{B/A} \qquad (11-1)$$

شكل (١-١١) حركة شخص داخل حافلة نسبة لمراقب على الأرض

فإذا اعتبرنا شخص يقف بالقرب من طريق سير على الأرض (هيكل مرجعي ثابت A) وكان شخص p في الباص يسير بسرعة $1m/s$ في نفس اتجاه حركة الباص الذي يسير بسرعة $3m/s$ (هيكل إسناد مرجعي B)، بذلك تكون سرعة الشخص في القطار نسبة الى الشخص الذي يقف على الأرض هي:

$$v_{p/A} = v_{p/B} + v_{B/A} \qquad (11\text{-}2)$$

$$v_{p/A} = 1 + 3 = 4m/s \qquad (11\text{-}3)$$

حركة المحاور الانتقالية:

بفرض أن $OXYZ$ تمثل المحاور الأساسية الثابتة (القصورية).

و $Qxyz$: هي المحاور المتحركة حركة انتقالية، حيث تبقى المحاور المتعاقبة OX، Qx وهلم جرا متوازية.

$\vec{R}$: تمثل متجه الجسيم p في المحاور الأساسية (القصورية الثابتة).

$\vec{r}$: تمثل متجه الجسيم p في المحاور المتحركة

$\vec{R}_o$: تمثل إزاحة نقطة الأصل المتحركة OQ

من الشكل فإن:

$$\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r} \qquad (11\text{-}4)$$

بأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{v} \qquad (11\text{-}5)$$

وبأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة للزمن ثانية نحصل على :

$$\vec{A} = \vec{A}_o + \vec{a} \qquad (11\text{-}6)$$

حيث $\vec{\mathrm{V}}_o$, $\vec{A}_o$ سرعة وتسارع نقطة الأصل المتحركة على التوالي، كما أن $\vec{\mathrm{v}}_o$, $\vec{a}_o$ سرعة وتسارع الجسيم p في المحاور المتحركة على التوالي.

وعندما تكون المحاور المتحركة غير متسارعة، أي أن $\vec{A}_o = 0$، فان :

$$\vec{A} = \vec{a} \qquad (11\text{-}7)$$

أي أن العجلة (التسارع) متساوٍ في نظامي الإحداثيات (مجموعتي المحـاور) ، وهذا يكون ممكناً في حالة الحركة الدورانية.

الآن:

$$\vec{A} = \vec{A}_o + \vec{a} \qquad (11\text{-}6)$$

$$m\vec{A} = m\vec{A}_o + m\vec{a} \qquad (11\text{-}8)$$

$$\vec{F} = m\vec{A}_o + m\vec{a} \qquad (11\text{-}9)$$

$$\vec{F} - m\vec{A}_o = m\vec{a} \qquad (11\text{-}10)$$

$$"\vec{F}" = m\vec{a} \qquad (11\text{-}11)$$

ويسمى "$\vec{F}$" الحد الزائف (القوة الزائفة أو الخيالية) حيث ينجم هذا الحد من اختيار محاور مرجعية، والمحاور المرجعية النيوتونية لا تحتوي معادلة الحركة فيها على حدود زائفة.

(١١-٢) الحركة العامة للمحاور (الانتقالية والدورانية):

باعتبار أن حركة المحاور المرجعية هي حركة انتقالية ودورانية على حد سواء، ليكن $\vec{r}$:متجه موضع الجسيم p في المحاور الدورانية فإنّه يمكن كتابة:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (11\text{-}12)$$

$$\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r} = \vec{R}_o + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (11\text{-}13)$$

وبأخذ المشتقة بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_o}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \right) \qquad (11\text{-}14)$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_o}{dt} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \right) \qquad (11\text{-}15)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{v} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \qquad (11\text{-}16)$$

حيث $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ أي $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$

والحدود $x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$ تمثل السرعة الناشئة عن دوران المحاور، ويمكن إثبات أنها تساوي $\vec{\omega} x \vec{r}$ وعليه يكون:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_o}{dt} + \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} x \vec{r} \qquad (11\text{-}17)$$

حيث $\frac{dR_o}{dt} = \vec{V}_o$ تشير إلى سرعة المحاور الانتقالية نسبة إلى المحاور الثابتة.

وللتأكيد على الربط بين سرعة الجسيم في المحاور الثابتة وسرعته في المحاور المتحركة، فإن العلاقة السابقة تكون:

$$\left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{\text{الثابتة}} = \vec{V}_o + \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\text{المتحركة}} + \vec{\omega} x \vec{r} \tag{11-18}$$

أو

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_o + \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega} x\right)\vec{r} \tag{11-19}$$

وبالمثل يمكن إيجاد المشتقة الثانية :

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{A}_o + \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega} x\right)\left(\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} x \vec{r}\right) \tag{11-20}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{A}_o + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} x \vec{r}\right) + \vec{\omega} x \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} x \left(\vec{\omega} x \vec{r}\right) \tag{11-21}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{A}_o + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} x \vec{r} + \vec{\omega} x \frac{d\vec{r}}{dt}\right) + \vec{\omega} x \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} x \left(\vec{\omega} x \vec{r}\right) \tag{11-22}$$

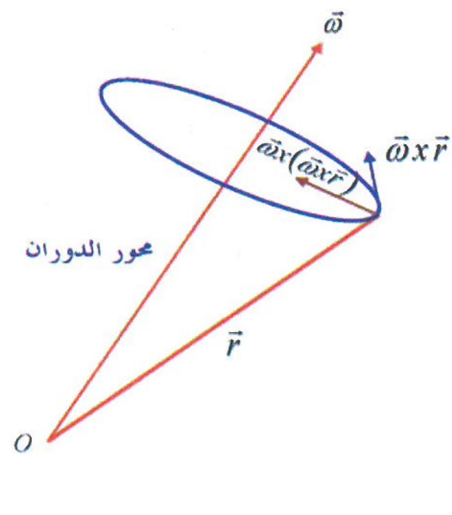
$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \vec{A}_o = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} x \vec{r} + \vec{\omega} x \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} x \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} x \left(\vec{\omega} x \vec{r}\right) \tag{11-23}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}-\underbrace{\vec{A}_o}_{\text{تعجيل نقطة الأصل في المحاور المتحركة}}=\overbrace{\underbrace{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}_{\text{تعجيل الجسم في المحاور المتحركة}}+\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}x\,\vec{r}}_{\text{يسمى التعجيل المستعرض}}+\underbrace{2\vec{\omega}\,x\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{يسمى التعجيل الكوريولي}}+\underbrace{\vec{\omega}\,x(\vec{\omega}\,x\,\vec{r})}_{\text{تعجيل الجذب المركزي}}}^{\text{يمثل تعجيل الجسم في المحاور المتحركة (الدّوارة)}}$$

(١١-٢٤)

أو

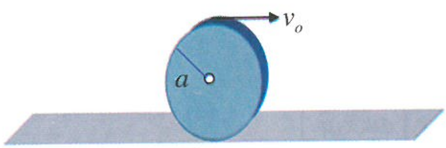
$$m\ddot{\vec{r}}=m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}-m\dot{\vec{\omega}}x\vec{r}-2m\vec{\omega}x\dot{\vec{r}}-m\vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{r}\right)-m\vec{A}_o \qquad (11\text{-}25)$$



ويسمى الحد الثاني والثالث والرابع والخامس، في الطرف الأيمن من المعادلة السابقة بالقوى الزائفة.

أمثلة محلولة:

مثال١: عجلة نصف قطرها a تتدحرج على سطح أفقي بسرعة ثابتة مقدارها v_o.
احسب التسارع لأي نقطة على محيط العجلة بالنسبة للأرض.



الحـل:

بفرض أن المحور x يمر من النقطة p المراد حساب تسارعها فيكون متجه موضع النقطة p في المحاور المتحركة:

$$\vec{r} = a\hat{i}$$

وعليه فان :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = 0$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = 0$$

ولكون مستوى العجلة في المستوى السيني - الصادي، فإن محور دوران العجلة يكون z وعليه فإن:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$$

أيضاً بما أن v_o ثابتة فإن A_o تساوي صفراً.

الآن:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{A}_o + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} x\vec{r} + 2\vec{\omega}x\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{r}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{r}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \omega\hat{k}x\left(\omega\hat{k}xa\hat{i}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \omega\hat{k}x\left(a\omega\hat{j}\right) = -a\omega^2\hat{i}$$

أيضاً ولأن الحركة دورانية، دون تزحلق، فإن :

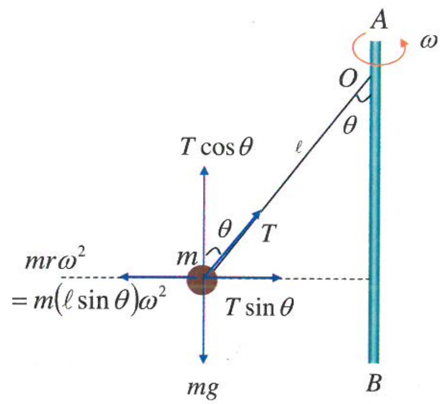
$$\omega = \frac{v}{a}$$

وعليه فإن:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -\frac{v^2}{a}\hat{i}$$

أي أن التسارع للنقطة p يكون باتجاه مركز العجلة.

مثال٢: الشكل أدناه يبين قضيب عمودي AB يدور بسرعة زاوية ثابتة ω. خيط خفيف (عديم الكتلة) وغير قابل للمط طوله ℓ إحدى نهايتيه مربوط بالنقطة O على القضيب AB ونهايته الأخرى مربوط بها كتلة m، أوجد:



أ- الشد في الخيط.

ب- الزاوية التي يصنعها الخيط مع القضيب في حالة الاتزان.

الحـل:

في حالة الاتزان فإن $\sum \tau_y = 0$:

$$T\ \cos\theta - mg = 0$$

$$T\ \cos\theta = mg \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

أيضاً $\sum \tau_x = 0$:

$$T\ \sin\theta - m\omega^2 \ell \sin\theta = 0$$

$$T\ \sin\theta = m\omega^2 \ell \sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

حيـث أن القـوة $m\omega^2\ell\sin\theta$ الناجمـة عـن دوران القضـيب بسـرعة ω تساوي القـوة المركزيـة مقـداراً وتعاكسـها اتجاهـاً كـما يوضـح الشـكل أعـلاه، ونتيجـة لـذلك فـإنّ الكتلـة m تـدور حـول القضـيب بـدائرة نصـف قطرهـا $(\ell\sin\theta)$ ثابت في حالة الاتزان.

بقسمة (2) على (1) نحصل على:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\omega^2\ell\sin\theta}{g}$$

أو

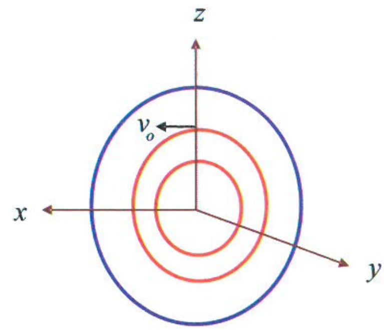
$$\cos\theta=\frac{g}{\omega^2\ell}\quad\Rightarrow\quad\theta=\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2\ell}\right)$$

ومن المعادلة (1):

$$T=\frac{mg}{\cos\theta}=m\omega^2\ell$$

ولكون الخيط والكتلة تصف سطح مخروط (cone) فإن النظام يسمى أحياناً البندول المخروطي (a conical pendulum).

مثال٣: تزحف حشرة بسرعة ثابتة v_o على سلك عجلة تدور بسرعة زاوية ثابتة ω، أوجد:



١ - القوى المؤثرة على الحشرة.

٢- المسافة التي تزحفها (تتحركها) الحشرة قبل أن تبدأ بالانزلاق إذا علمت أن معامل الاحتكاك بين الحشرة والسلك هو μ .

الحل:

بفرض أن الحشرة تتحرك على السلك في الاتجاه x فإن:

$$\vec{r} = x\hat{i}$$

وتكون:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} = v_o\hat{i}$$

$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

أيضاً:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

وعليه فإن القوة المستعرضة:

$$-m\dot{\vec{\omega}}x\vec{r}=0$$

أيضاً القوة الكوريولوية (قوة كوريولوس):

$$-2m\vec{\omega}x\dot{\vec{r}}=-2m\left(\omega\hat{k}\right)x\left(v_o\hat{i}\right)=-2m\omega v_o\hat{j}$$

وأيضاً فإن القوة النابذة (قوة الطرد المركزي أو الجذب المركزي):

$$-m\vec{\omega}x\left(\vec{\omega}x\vec{r}\right)=-m\left(\omega\hat{k}\right)x\left[\left(\omega\hat{k}\right)x\left(x\hat{i}\right)\right]$$
$$=-m\left(\omega\hat{k}\right)x\left(\omega x\hat{j}\right)=m\omega^2x\hat{i}$$

وعليه فإن:

$$\vec{F}=2m\omega v_o\hat{j}-m\omega^2x\hat{i}=-m\omega^2x\hat{i}+2m\omega v_o\hat{j}$$

وهذه هي القوة الحقيقية التي يؤثر بها السلك على الحشرة. ولكي لا تنزلق الحشرة فإن :

$$\left|\vec{F}\right|=\mu mg$$

$$\sqrt{\left(-m\omega^2x\right)^2+\left(2m\omega v_o\right)^2}=\mu mg$$

وعليه فإن:

$$x=\frac{\sqrt{\mu^2g^2-4\omega^2v_o^2}}{\omega^2}$$

أسئلة وتمارين

١ - مجموعة إسناد (محاور) xyz تدور بالنسبة لمجموعة أخرى XYZ لها نفس نقطة الأصل وثابتة (مثبتة) في الفراغ. إذا كانت السرعة الزاوية للمحاور المتحركة (المجموعة xyz) بالنسبة الى المجموعة الثابتة القصورية XYZ تعطى بالعلاقة:

$$\vec{\omega} = (2t)\hat{i} - t^2\hat{j} + (2t+4)\hat{k}$$

وكان متجه موضع جسيم عند اللحظة t كما يشاهد في المجموعة xyz يعطى بالعلاقة :

$$\vec{r} = (t^2+1)\hat{i} - (6t)\hat{j} + (4t^3)\hat{k}$$

أوجد:

١ - السرعة الظاهرية.

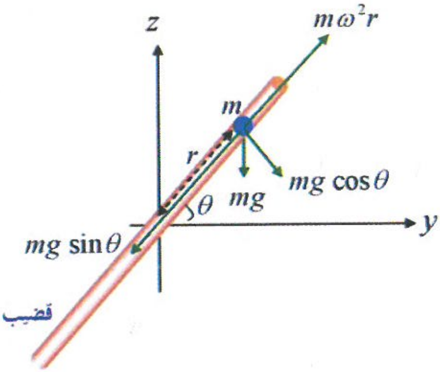
٢ - السرعة الحقيقية.

٣- العجلة الظاهرية.

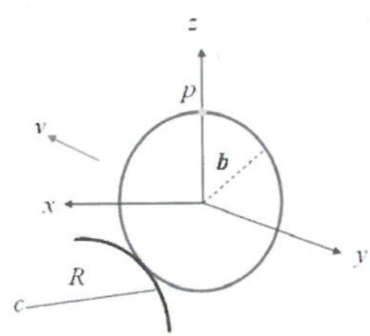
٤ - العجلة الحقيقية.

وذلك عند اللحظة $t = 1$. أيضاً إذا كانت كتلة الجسيم وحدتان $(m = 2)$، أوجد كل قوة من القوى الزائفة.

٢- أنبوب رفيع فارغ (ليس مصمت) في المستوى yz يدور حول المحور x بسرعة زاوية وثابتة ω. بفرض عدم وجود احتكاك، اكتب معادلة (معادلات) الحركة لجسيم كتلته m داخل الأنبوب وحركته محددة على طول الأنبوب فقط.

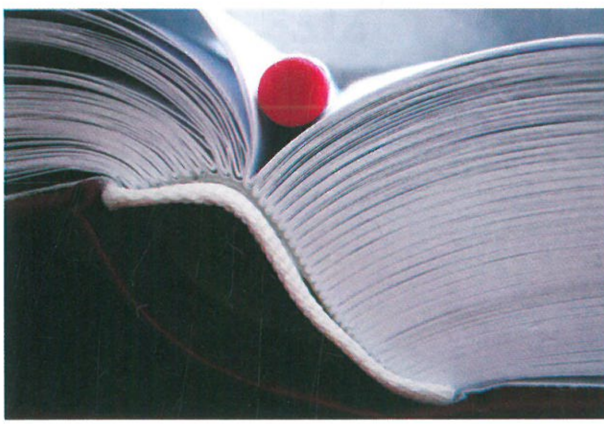


٣- دراجة هوائية نصف قطر عجلتها b وتسير بسرعة ثابتة v على طريق منحني نصف قطره R.



أ- ما هو تسارع أعلى نقطة في العجلة.

ب- ما هو تسارع النقطة السفلى في العجلة.



الملاحق

ملحق (١)

متجهات الوحدة العمودية

متجهات الوحدة:

انه من الملائم والمفيد وصف الكميات المتجه (المتجهات) بواسطة متجهات الوحدة العمودية $(\hat{k} , \hat{j} , \hat{i})$ والتي تعبر عن الاتجاهات الموجبة للإحداثيات الديكارتية (z , y , x) على الترتيب. وتكون قيمة (طول) كل من هذه المتجهات وحدة واحدة $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$، كما أن كل منها يعامد الأخرين وليس لها وحدات. ويجدر التأكيد بان $(\hat{k} , \hat{j} , \hat{i})$ تستخدم في التعبير عن اتجاه فقط، فمثلاً عندما نقول أن إزاحة جسم هي $2m$ بالاتجاه السيني الموجب فيعبر عن ذلك، وبدلالة متجهات الوحدة العمودية بالمتجه $\vec{x}$:

$$\vec{x} = 2\hat{i} \qquad (م-1)$$

وبالمثل إذا كانت الحركة (الإزاحة) في الاتجاه y فقط أو في الاتجاه z فقط. وفي المقابل فإنه إذا كانت إزاحة الجسم $2m$ في الاتجاه السيني السالب فإنه يعبر عن ذلك بالمتجه:

$$\vec{x} = -2\hat{i} \qquad \text{(م - 2)}$$

وتكون وحدات بالمتر. ويطلق على مثل هذه الحركة حركة في خط مستقيم أو في اتجاه واحد أو في بعد واحد حيث يظهر في المتجه $\vec{x}$ $\hat{i}$ مثلاً متجه وحدة x عمودي في أو $\hat{j}$ أو $\hat{k}$ فقط.

وإذا تحرك جسم $2m$ في الاتجاه السيني الموجب، $3m$ في الاتجاه الصادي الموجب (أي أن حركة الجسم في المستوى السيني – الصادي) فإنه يعبر عن ذلك بالمتجه $\vec{r}$:

$$\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} \qquad \text{(م - 3)}$$

وتسمى هذه الحركة وما يماثلها حركة في بعدين أو حركة في مستوى. وتسمى الأعداد 2 ، 3 مركبات المتجه $\vec{r}$ كما أن $2\hat{i}$ ، $3\hat{j}$ تسمى المركبات الاتجاهية للمتجه $\vec{r}$ ، ويعطى طول المتجه $\vec{r}$ بالعلاقة:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} \qquad \text{(م - 4)}$$

$$r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3.6 \qquad \text{(م - 5)}$$

أي أن طول المتجه يساوي الجذر التربيعي لمجموع مربعات مركبات المتجه (أي مجموع مربعات معاملات $\hat{i}$، $\hat{j}$).

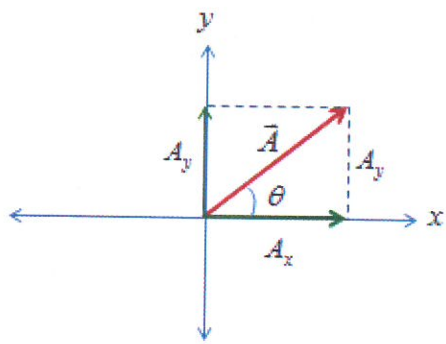
وكذلك الحال بالنسبة لأي متجه $\vec{A}$ مثلاً في المستوى السيني الصادي فإنه يمكن استبداله بمركباته الاتجاهية $A_x\hat{i}$، $A_y\hat{j}$ حيث

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (6\text{-م})$$

وتسمى هذه الطريقة طريقة المركبات.

وحسب نظرية فيثاغورس فان طول المتجه $\vec{A}$:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (7\text{-م})$$



شكل (م-١): تحليل متجه إلى مركبتيه

ووفقاً لتعريف العلاقات المثلثية $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ فإن مركبات المتجه $\vec{A}$ تكون:

$$A_x = A\cos\theta \qquad (8\text{-م})$$

$$A_y = A\sin\theta \qquad (9\text{-م})$$

حيث θ هي الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{A}$ مع الإحداثي السيني الموجب عكس عقارب الساعة وتعطى بالعلاقة:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{(م - 10)}$$

أو

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \quad \text{(م - 11)}$$

وينصح باستخدام طريقة المركبات لإيجاد مجموع (محصلة) متجهين أو أكثر، فمثلاً إذا كان لدينا المتجهان :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \quad \text{(م - 12)}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

وأردنا إيجاد المحصلة $\vec{R}$ ، فإن:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad \text{(م - 13)}$$

$$\vec{R} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right) + \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}\right) \quad \text{(م - 14)}$$

$$\vec{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j} \quad \text{(م - 15)}$$

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} \quad \text{(م - 16)}$$

حيث R_x ، R_y مركبات المتجه $\vec{R}$:

$$R_x = A_x + B_x \qquad (\text{م-17})$$

$$R_y = A_y + B_y \qquad (\text{م-18})$$

وتكون قيمة المتجه $\vec{R}$:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (\text{م-19})$$

وعادة يعبر عن اتجاه $\vec{R}$ بالزاوية ، ولتكن α مثلا، التي يصنعها مع الإحداثي السيني الموجب :

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \qquad (\text{م-20})$$

أو

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \qquad (\text{م-21})$$

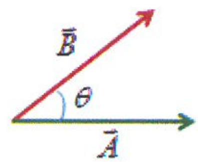
وبشكل عام فإنه يمكن التعبير عن أي متجه كالمتجه $\vec{C}$ مثلا في ثلاثة أبعاد (الفراغ، الفضاء) بالصورة:

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k} \qquad (\text{م-22})$$

وتتمتع طريقة المركبات بأهمية بالغة، في التعبير عن المتجهات، في إيجاد حاصل الضرب القياسي وإيجاد حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين وذلك بسبب أهميتها في تعريف بعض الكميات الفيزيائية والذي تفرض علينا دراستهما.

حاصل الضرب القياسي:

حاصل الضرب القياسي لمتجهين $\vec{A}$، $\vec{B}$ يكتب على الصورة $\vec{A}.\vec{B}$ ويقرأ A دوت B (أو A نقطة B)،



شكل (م-٢) : متجهان بينهما زاوية

ويعرّف:

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta \qquad (23 - م)$$

أو

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \qquad (24 - م)$$

أي حاصل ضرب قيمتي المتجهين في جيب تمام الزاوية بينهما، أو حاصل ضرب مركبة إحدى المتجهين (في اتجاه الآخر) في قيمة المتجه الآخر. ويبرز حاصل الضرب القياسي في تعريف الشغل W_F مثلاً، فالشغل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ في إزاحة الجسم $\vec{s}$ يكتب على الصورة :

$$W_F = \vec{F}.\vec{s} \qquad (25 - م)$$

$$W_F = Fs\cos\theta \qquad (26 - م)$$

$$W_F = \left(F\cos\theta\right)s \qquad (27 - م)$$

أي حاصل ضرب مركبة القوة باتجاه الإزاحة في قيمة متجه الإزاحة.

ومن الأهمية ملاحظة أن مركبة القوة $F\sin\theta$، والتي تكون معامدة للإزاحة، لا تنتج شغلا.

وحسب تعريف الضرب القياسي فان $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$ أي أن حاصل الضرب القياسي لمتجهات الوحدة العمودية المتماثلة يساوي واحد بينما حاصل الضرب القياسي لمتجهات الوحدة المتعامدة المختلفة يساوي صفر أي أن $\hat{i}.\hat{j}=0$ وبالمثل $\hat{i}.\hat{k}=0$ ، $\hat{j}.\hat{k}=0$ ونستفيد من ذلك عندما تعطى القوة $\vec{F}$ والإزاحة $\vec{s}$ بدلالة متجهات الوحدة العمودية (المركبات الاتجاهية).

فمثلاً إذا كانت:

$$\vec{F}=4\hat{i}+3\hat{j}$$

$$\vec{s}=-\hat{i}+3\hat{j}$$

فانه يمكن حساب الشغل المبذول باستخدام العلاقة:

$$W_F=\vec{F}.\vec{s} \qquad (25\text{ - م})$$

$$W_F=(4)(-1)+(3)(3)=-4+9=5$$

أي مجموع حاصل ضرب معاملات $\hat{i}$ وحاصل ضرب معاملات $\hat{j}$.

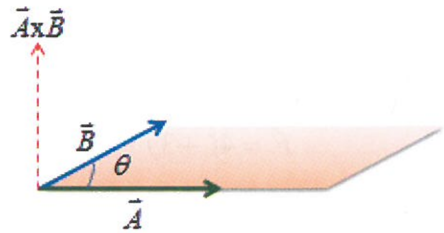
وتجدر الإشارة الى أن الضرب القياسي تبديلي أي أن $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ وعليه فإنه يكون مثلاً $\vec{F}.\vec{s}=\vec{s}.\vec{F}$ ، ويمكن ملاحظة أنه إذا كانت القوة $\vec{F}$ في نفس اتجاه الإزاحة $\vec{s}$ ، أي أن القوة موازية للإزاحة $(\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=1)$ فإنه يكون:

$$W_F=Fs \qquad (28\text{ - م})$$

كما ويظهر الضرب القياسي في تعريف كميات فيزيائية أخرى كطاقة الوضع أو الطاقة الكامنة وأيضا القدرة.

حاصل الضرب الاتجاهي:

حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين $\vec{A}$، $\vec{B}$ يكتب على الصورة $\vec{A}x\vec{B}$ ويقرأ A كروس B (أو A في B) ويمثل $\vec{A}x\vec{B}$ متجهاً، وليكن $\vec{C}$ ، معامداً لكل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أي معامداً لمستوى المتجهين،



شكل (م-٣) : اتجاه حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين

ويعرّف:

$$\vec{A}x\vec{B} = \left[\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\right]\hat{n} \qquad (\text{م} - 29)$$

$$\vec{A}x\vec{B} = \left[AB\sin\theta\right]\hat{n} \qquad (\text{م} - 30)$$

حيث $\hat{n}$ متجه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

وحسب هذا التعريف فإن $\hat{i}x\hat{i} = \hat{j}x\hat{j} = \hat{k}x\hat{k} = 0$ حيث أن الزاوية بين متجه الوحدة ونفسه تساوي صفراً $(\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0)$.

كما وأنه حسب التعريف فإن $\hat{i}x\hat{j} = \hat{k}$ ، $\hat{j}x\hat{k} = \hat{i}$ ، $\hat{k}x\hat{i} = \hat{j}$ ويتبع هذا النوع من الضرب ما يعرف بالترتيب الدوراني.

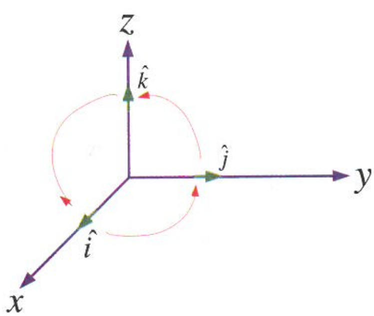
أيضاً وحسب قاعدة اليد اليمنى أو قاعدة البرغي فإنه يمكن ملاحظة أن:

$$\vec{A}x\vec{B} = -\hat{B}x\hat{A} \qquad (\text{م-}31)$$

أي أن الضرب الاتجاهي ليس تبديلي كما هو الحال في الضرب القياسي.

ولحساب مقدار $\vec{A}x\vec{B}$:

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = AB\sin\theta \qquad (\text{م-}32)$$



شكل (م-٤) : بيان الترتيب الدوراني في الضرب الاتجاهي

ويظهر الضرب الاتجاهي مثلاً في تعريف عزم القوة أو العزم $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r}x\vec{F} \qquad (\text{م-}33)$$

وعادة تكون القوة $\vec{F}$ وذراع تأثير القوة $\vec{r}$ في المستوى السيني – الصادي وعليه فان $\vec{\tau}$ تكون في الاتجاه z أي $+\hat{k}$ أو $-\hat{k}$ والتي يعبر عنها بعكس عقارب الساعة أو اتجاه عقارب الساعة على الترتيب وبتحديد (معرفة) اتجاه $\vec{\tau}$ فان الأهم يكون معرفة مقدارها والذي يعطى بالعلاقة:

$$\tau = rF\sin\theta \qquad (\text{م-}34)$$

وقد تطرقنا إلى هذا الموضوع بالتفصيل عند دراسة ديناميكا الحركة الدورانية.

ومن الكميات الفيزيائية الهامة الذي يظهر فيها الضرب الاتجاهي عزم كمية الحركة (كمية الحركة الزاوية، الزخم الزاوي) $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} x \vec{p} \qquad (35 - م)$$

حيث $\vec{p}$ هي كمية الحركة الخطية. وتتمتع $\vec{L}$ بأهمية خاصة جداً في ميكانيكا الكم.

ملحق (٢)
بعض الثوابت الفيزيائية

بعض الثوابت الفيزيائية		
الكمية الفيزيائية	الرمز	المقدار
عجلة الجاذبية الأرضية	g	$9.806\ 65\ \mathrm{m/s^2}$
كتلة الأرض	M_E	$5.973\ 70(76) \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$
نصف قطر الأرض	R_E	$6.378\ 140 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$
كتلة الشمس	M_S	$1.988\ 92(25) \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$
نصف قطر الشمس	R_S	$6.96 \times 10^{8}\ \mathrm{m}$
ثابت الجذب العام	G	$6.672\ 59(85) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}$

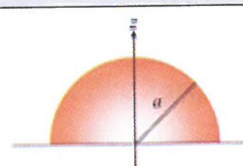
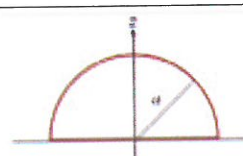
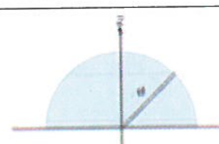
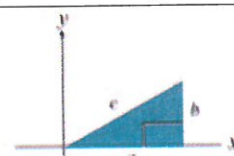
ملحق (٣)

معاملات المرونة لبعض المواد

معاملات المرونة لبعض المواد		
المادة	معامل المرونة الطولي (N/m^2)	معامل المرونة الحجمي (N/m^2)
Tungsten	35×10^{10}	20×10^{10}
Steel	20×10^{10}	6×10^{10}
Copper	11×10^{10}	14×10^{10}
Brass	9.1×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminum	7×10^{10}	7×10^{10}
Glass	$(6.5 - 7.8 \times 10^{10})$	$(5.0 - 5.5 \times 10^{10})$
Quartz	5.6×10^{10}	2.7×10^{10}

ملحق (٤)

مركز الكتلة لبعض الأجسام المنتظمة

مركز الكتلة لبعض الأجسام المنتظمة	
الجسم	**مركز الكتلة**
 نصف كرة مصمتة نصف قطرها a	$\bar{z} = \frac{3}{8}a$
 نصف كرة مفرغة نصف قطرها a	$\bar{z} = \frac{1}{2}a$
 صفيحة نصف دائرية منتظمة نصف قطرها a	$\bar{z} = \frac{4}{3\pi}a$
 جسم صلب على شكل مثلث قائم الزاوية	$\bar{x} = \frac{2}{3}a$ $\bar{y} = \frac{1}{3}a$

ملحق (٥)

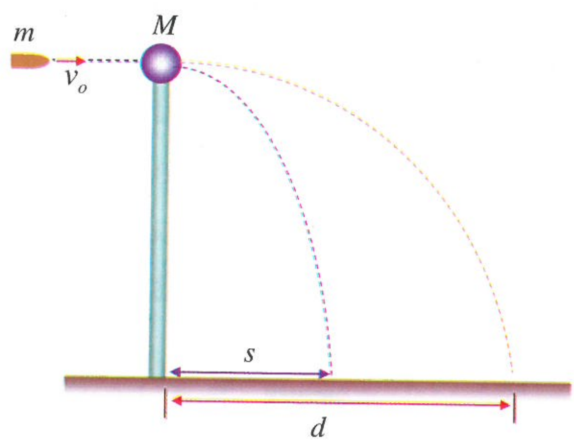
عزم القصور الذاتي لبعض الأجسام الصلبة المتجانسة

عزم القصور الذاتي لبعض الأجسام الصلبة المتجانسة حول محور عمودي يمر في مركزها	
قضيب رفيع طوله L	$\frac{1}{2}ML^2$
قرص نصف قطره R	$\frac{1}{2}MR^2$
حلقة دائرية نصف قطرها R	MR^2
كرة مصمتة (ممتلئة ، ممتدة) نصف قطرها R	$\frac{2}{5}MR^2$
اسطوانة مصمتة نصف قطرها R	$\frac{1}{2}MR^2$
اسطوانة فارغة نصف قطرها R	MR^2

اختبار مستوى

السؤال الأول:

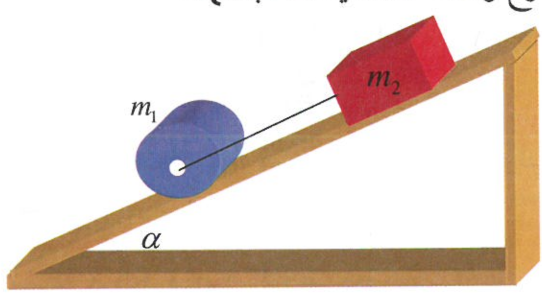
كرة صغيرة كتلتها $M = 0.2kg$ موضوعة على عمود (وتد) ارتفاعه $h = 5m$.
رصاصة كتلتها $m = 0.01kg$ تتحرك بسرعة $v_o = 500m/s$ تخترق أفقيا مركز الكرة (انظر الشكل). الكرة تصل الأرض على بعد $s = 20m$ من أسفل الوتد.



على أي بعد، من أسفل الوتد تصل الرصاصة؟ وما هي نسبة طاقة الحركة للرصاصة التي تحولت إلى حرارة عندما اخترقت الرصاصة الكرة؟ (أهمل مقاومة الهواء واعتبر $g = 10m/s^2$).

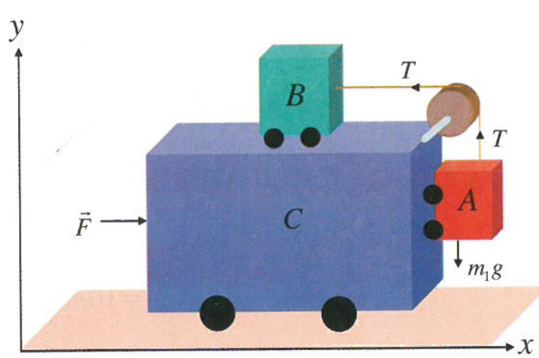
السؤال الثاني:

على سطح مائل، يميل بزاوية $\alpha = 30^o$ عن الأفقي، توجد قطعة خشبية كتلتها $m_2 = 4kg$ متصلة بواسطة خيط عديم الكتلة باسطوانة مصمتة كتلتها $m_1 = 8kg$ ونصف قطرها $r = 5cm$ (انظر الشكل). أوجد قوة الاحتكاك بين الاسطوانة والسطح علماً بأن معامل الاحتكاك الحركي $\mu = 0.2$. أيضاً أوجد قوة الشد في الخيط والتسارع وذلك عندما يفلت الجسمان.



السؤال الثالث:

الشكل المجاور يبين نظام ميكانيكي يتكون من ثلاث عربات A ، B ، C كتلها $m_1 = 0.3kg$ ، $m_2 = 0.2kg$ ، $m_3 = 1.5kg$ على الترتيب. العربتان A و B موصولتان بخيط خفيف (عديم الكتلة)، غير مرن، محكم ويمر فوق بكرة ملساء (عديمة الاحتكاك) وخفيفة (مهملة الكتلة) مربوطة مع العربة C كما في الشكل.



١- أثرت قوة أفقية $\vec{F}$ على العربة C كما في الشكل، ومقدار $\vec{F}$ يبقي العربتين A و B في حالة سكون نسبة إلى العربة C. احسب:

أ- الشد في الخيط الواصل بين العربتين A و B.

ب- مقدار القوة $\vec{F}$

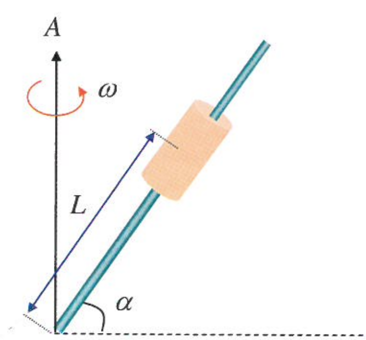
٢- إذا أبقيت العربة C ثابتة بينما العربتان A و B أفلتتا من السكون،

أ- أوجد تسارع العربتين A و B.

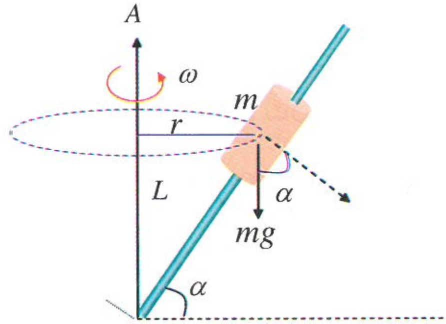
ب- احسب الشد في الخيط (أهمل قوى الاحتكاك وقوى الممانعة واعتبر $g = 9.81 m/s^2$).

السؤال الرابع:

يدور قضيب بسرعة زاوية مقدارها ω حول محور عمودي A وزاوية ميل القضيب عن المحور العمودي هي $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. جسم كتلته m يستطيع الانزلاق على طول القضيب ومعامل الاحتكاك له هو $\mu = \tan\beta$ حيث β تسمى زاوية الاحتكاك.



أ- أوجد الزاوية α التي تبقي الجسم ساكناً، وأوجد أيضاً الزاوية α كي يبدأ الجسم بالحركة في حالة عدم دوران القضيب.



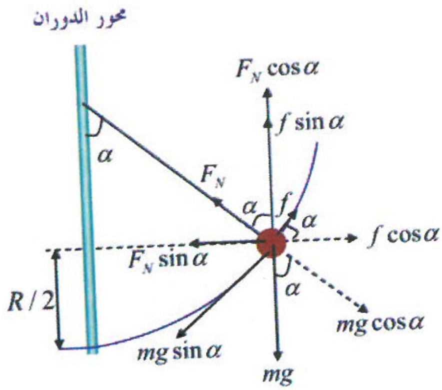
ب- إذا كان القضيب يدور بسرعة زاوية ثابتة $(\omega \succ 0)$ وكانت الزاوية α لا تتغير خلال الدوران، أوجد العلاقة بين r والزوايا α, β لتحديد إذا كان الجسم سيبقى ساكناً أو يتحرك بالنسبة للقضيب.

تنبيه :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

السؤال الخامس:

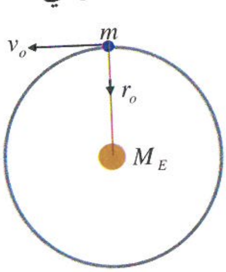
كرة فارغة نصف قطرها $R = 0.5m$ تدور حول محور عمودي يمر بمركزها بسرعة زاوية $\omega = 5rad/s$. إذا كان بداخل الكرة كتلة خشبية صغيرة تتحرك مع الكرة الفارغة وعلى ارتفاع $R/2$. اوجد معامل الاحتكاك بين الكتلة الخشبية والسطح الداخلي للكرة كي يتحقق هذا الشرط (اعتبر $g = 10m/s^2$).



السؤال السادس:

قمر صناعي للاتصالات زمنه الدوري T_o وكتلته m موضوع في مدار استوائي نصف قطره r_o (اعتبر $R_E = 6.37x10^6 m$, $g = 9.81m/s^2$, $T_o = 24h$

حيث R_E نصف قطر الأرض).



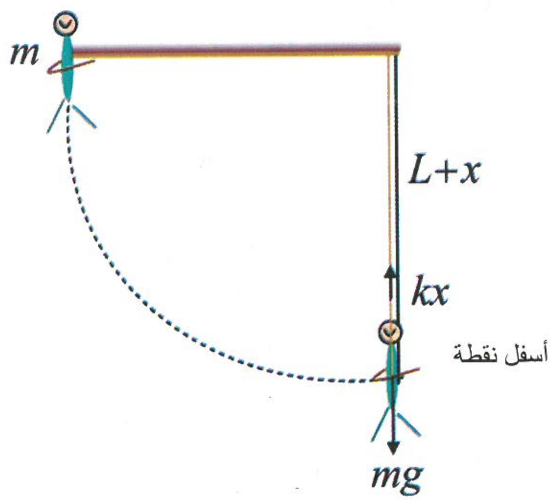
١- احسب قيمة r_o.

٢- اكتب السرعة المماسة v_o للقمر الصناعي بدلالة g ، R_E ، r_o واحسب قيمتها العددية.

٣- اوجد كمية الحركة الزاوية L_o والطاقة الميكانيكية E_o للقمر الصناعي بدلالة v_o ، m ، g R_E.

السؤال السابع:

يمسك شخص، هاوي للقفز، بطرف حبل مرن طويل مثبتة نهايته الأخرى بجسر مرتفع. يقذف الشخص نفسه بقوة من الجسر ويتهاوى من حالة السكون باتجاه نهر أسفله لكنه لم يلامس الماء. كتلة الشخص m وطول الحبل الأصلي L وثابت المرونة للحبل k وعجلة الجاذبية الأرضية g. بإهمال مقاومة الهواء وكتلة الحبل واعتبار أن الحبل يطيع قانون هوك، أوجد:

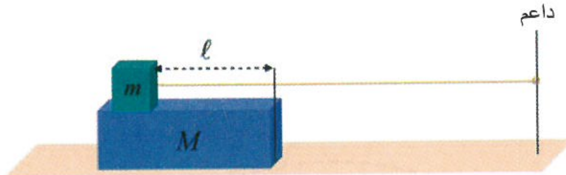


١- المسافة التي سقطها الشخص قبل أن يصل لحظياً إلى حالة سكون للمرة الأولى.

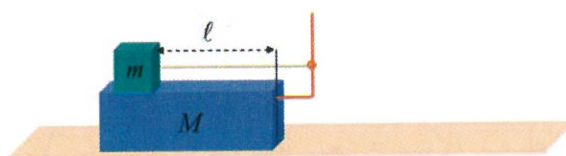
٢- أقصى سرعة v للشخص خلال سقوطه.

السؤال الثامن:

مزلاج مستطيل الشكل كتلته $M = 1kg$ موضوع على سطح أفقي أملس. وضعت حاملة، مزودة بمحرك (موتور)، كتلتها $m = 0.1kg$ على السطح العلوي الأفقي للمزلاج وتستطيع أن تنـزلق عليه.



الشكل ١ - أ



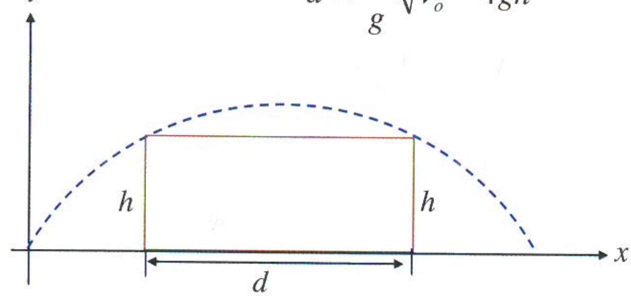
الشكل ١ - ب

معامل الاحتكاك للحاملة هو $\mu = 0.02$. المحرك يلف خيط حول عمود بسرعة ثابتة $v_o = 0.1m/s$ والطرف الآخر للخيط مربوط بداعم (عمود) ثابت بعيد نوعاً ما في الحالة الأولى كما يبين الشكل (١-أ) بينما في حالة أخرى فان الطرف الآخر للخيط متصل مع مسمار في حافة المزلاج كما في الشكل (١-ب) ولا يوجد احتكاك بين الحاملة والمزلاج. بالإبقاء على المزلاج ثابت والسماح للحاملة بالحركة بسرعة v_o فان المزلاج يتحرر(أي يستطيع الحركة).في اللحظة التي يتحرر بها المزلاج فإن حافة المقدمة للحاملة تكون على بعد $\ell = 0.5m$ من حافة المقدمة للمزلاج. في كلا الحالتين اوجد قوانين الحركة لكل من المزلاج والحاملة وأوجد أيضاً الزمن اللازم للحاملة حتى تصل الحافة الرأسية لمقدمة المزلاج (اعتبر $g = 10m/s^2$).

السؤال التاسع:

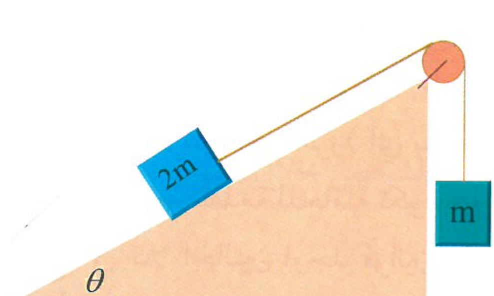
أطلقت قذيفة مدفع بسرعة ابتدائية v_o ومرّت من نقطتين كلاهما فوق الأفقي مسافة h. إذا وجهت فوهة المدفع بزاوية أقصى مدى، بيّن أن النقطتين تبعدان عن بعضهما مسافة d:

$$d = \frac{v_o}{g}\sqrt{v_o^2 - 4gh}$$



السؤال العاشر:

كتلتان إحداهما ضعف الأخرى موصولتان بخيط خفيف (عديم الكتلة)يمر على بكرة ملساء (انظر الشكل). إذا كان معامل الاحتكاك μ_k، أوجد الزاوية θ التي تسمح بحركة الكتلتين بسرعة ثابتة.



الأجوبة

الوحدة الأولى:

أولاً :

١- ب　　٢- أ　　٣- د　　٤- ج　　٥- د

ثانياً:

١- $13934.1\ m^2$

٢- $22.2\ m/s$

٣- بعد الطرف الأيسر= بعد الطرف الأيمن = T، أي أنّ المعادلة متجانسة بعدياً

٤- الوحدة : kg/s^2 ويكون البعد : $M/T^2 = MT^{-2}$

٥- البعد : LT^{-3}

٦- $n = 2$

٧- $66.9\ cm$

أسئلة تحدي:

١- $96285\ gm$

٢- 10^4 ماكرون

٣- $55.56\ kg/s$

٤- kg/s　٥- $n = -1$

الوحدة الثانية:

أولاً:

١- د ٢- ج ٣- ج ٤- ب ٥- أ

ثانياً:

١- $48.22\ km$ ، 38.95^o إلى الغرب من الشمال.

٢- أكبر قيمة = $14\ m$ ، أقل قيمة = $6\ m$

٣- $86.6\ m$

٤- مقدار المحصلة = $6.713\ cm$ وتصنع زاوية 116.5^o مع الإحداثي السيني الموجب

٥- $5\ m$

أسئلة تحدي:

١- تبعد $253.3\ km$ عن نقطة الأصل وتصنع زاوية 72^o مع الإحداثي السيني الموجب

٢- أ) $5.2\ m$ ب) $19.3\ m$

٣- تبعد $212.132\ km$ غرباً وأيضاً شمالاً

٤- مقدار المحصلة = $62.45\ N$ وتصنع زاوية 106.1^o مع الإحداثي السيني الموجب

٥- $T_1 = 11.8\ N$ ، $T_2 = 15.7\ N$

٦- $10\ N$

الوحدة الثالثة:

أولاً:

١- ب ٢- ج ٣- أ ٤- ج ٥- ب

ثانياً:

١- $6.94 m/s$

٢- $8\ m/s^2$

٣- أ) $99.2\ m$ ب) $44.1\ m/s$

٤- أ) $4.9\ m$ ب) $19.6\ m/s$ إلى أسفل

٥- $12\ m/s$

أسئلة تحدي:

١- المسافة المقطوعة = $17997\ m$ ، السرعة المتوسطة = $17.644\ m/s$

٢- $106.67\ m/s^2$

٣- $x = 7824.6\ m$

٤- $v_o = 26.1\ m/s$

٥- $4.85\ m/s$

٦- أ) $2.87\ s$ ب) $17.6\ m/s$

الوحدة الرابعة:

أولاً:

١- ب ٢- ج ٣- د ٤- ج ٥- أ

ثانياً:

١- أ) $a = 3\ m/s^2$ ب) $x = 28\ m$

ج) $a = 0.06\ m/s^2$

٢- $9.74\ m/s^2$

٣- 30.96^o

٤- $a = 3.92\ m/s^2$, $T = 5.88\ N$

٥- $T_1 = T_2 = 58.8\ N$

٦- $352.8\ N$

أسئلة تحدي:

١- أ) $128\ N$ ب) $68\ N$ ج) $98\ N$

٢- أ) $a = 2.16\ m/s^2$ ب) $T = 15.3\ N$

٣- أ) $a = 3.76\ m/s^2$ ب) $a = 1.06\ m/s^2$

٤- $a = 15.385\ m/s^2$ ، $T_2 = 64.62\ N$ ، $T_3 = 46.15\ N$

٥- أ) $4.33\ m/s^2$ ب) $2.51\ m/s^2$

٦- أ) قوة الاحتكاك الاستاتيكي (السكوني) بين الكتلتين

ب) $34.72\ N$ ج) 0.306

الوحدة الخامسة:

أولاً:

١- ب   ٢- ج   ٣- ب   ٤- ب   ٥- أ

ثانياً:

١- $a_c = 8.764 \text{x} 10^{22}\ m/s^2$, $F_c = 7.984 \text{x} 10^{-8}\ N$

٢- $\mu_s = 0.8$

٣- $12.25\ m/s$

٤- $v = \sqrt{Lg \sin\theta \tan\theta}$

٥- أ) $T = 19.34 \text{x} 10^6\ s$ ب) 1.18

أسئلة تحدي:

١- 75.52^o

٢- $v = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} rg}$

٣- 1060

٤- $v = 7.91 \text{x} 10^3\ m/s$

٥- $v = 22.14\ m/s$

٦- أ) $a_c = 1.67\ m/s^2$ ب) مقدار التسارع $a = 2.24\ m/s^2$
ويصنع زاوية $\theta = 41.93^o$ مع $\vec{a}_c$

٧- أ) 9.62^o ب) $25.64\ N$

الوحدة السادسة:

أولاً:

١- ب　　٢- د　　٣- ج　　٤- ب　　٥- أ

ثانياً:

١- صفر

٢- $1.38\ m$

٣- أ) $PE = 0$　　ب) $PE = 19.7\ J$

٤- $W = 238.55\ J$

٥- $t = 98\ s$

٦- $L = 2\ m$

أسئلة تحدي:

١- $v_A = 3\sqrt{gR}$, $v_B = 2\sqrt{2gR}$

٢- $812.1\ J$

٣- $3.43\ m/s$, $3.6\ m$

٤- $\mu_k = 0.505$

٥- $v_o = 13.83\ m/s$

٦- أ) $P = 980\ W$

٧- أ) $6x10^4\ J$　　ب) $2x10^4\ W$　　ج) $2.67x10^4\ W$

٨- أ) $5.47\ m$　　ب) نعم تتحرك إلى أسفل ثانية لأن $mg \sin\theta \succ f_k$

الوحدة السابعة:

أولاً:

١- ب　　٢- د　　٣- أ　　٤- ج　　٥- ج

ثانياً:

١- $F = 42.05\ N$

٢- $5.67x10^5\ N/m^2$

٣- $E = 0.686\ J$

٤- $k = 1.3x10^3\ N/m$

٥- أ) $40\ m/s$　　ب) $(80,\ 19.6)m$

٦- $x = 16\ cm$

أسئلة تحدي:

١- $\mu_k = 0.21$

٢- $5.6\ cm$

٣- $x = 4.43\ cm$, $v = 1.24\ m/s$

٤- $d = 28.91\ cm$

٥- $k = 8.82x10^3\ N/m$

٦- $W = 12\ J$

الوحدة الثامنة:

أولاً:

١- ب ٢- د ٣- أ ٤- ب ٥- ب

ثانياً:

١- 0.93

٢- $6\ kg$

٣- $60\ km/h$ في نفس اتجاه حركة السيارة

٤- $v_1' = -6\ m/s$ والإشارة السالبة تعني أنّ m_1 ترتد وتتحرك إلى اليسار بعد التصادم. أيضاً $v_2' = 2\ m/s$ والإشارة الموجبة تعني أنّ m_2 ترتد وتتحرك إلى اليمين بعد التصادم.

٥- 0.50

٦- $F = 10\ N$

٧- $17\ m/s$

٨- أ) $1.02\text{x}10^6\ N$ ب) $30.2\ m/s^2$

أسئلة تحدي:

١- $500.1\ m/s$

٢- $59.3\ cm$

٣- $222.2\ m/s$

٤- $10\ N$

٥- $400\ N$

٦- $1992.2\ m/s$

٧- يسقط الجزء الثاني على بعد $750\ m$ من المدفع.

٨- أ) $442x10^3\ kg$ ب) $19.2x10^3\ kg$

الوحدة التاسعة:

أولاً:

١- ب   ٢- ج   ٣- ب   ٤- أ   ٥- أ

ثانياً:

١- 50 revolutions

٢- 15

٣- $t = 5\ s$

٤- $35.3\ rad/s^2$

٥- المروحة الرئيسية $329.7\ m/s$ والأخرى $471.0\ m/s$

٦- أ) $1.45\text{x}10^{-4}\ rad/s$ ب) $1.74\text{x}10^{-3}\ rad/s$

أسئلة تحدي:

١- $2787\ m/s$

٢- أ) 24   ب) $37.1\ rad/s$

٣- $3.13\ rad/s$

٤- $35.3\ rad/s^2$

٥- $4.8\ m/s$

الوحدة العاشرة:

أولاً:

١- أ　　　٢- أ　　　٣- د　　　٤- ج

٥- أ　　　٦- ج　　　٧- ب

ثانياً:

١- $F = 7.444\ N$

٢- أ) $L = \frac{\ell^2 \omega_o}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$　　　ب) $\frac{1}{2}\ell\omega_o^2$

٣- أ) $3.74\ m/s$　　　ب) $3.5\ m/s^2$

٤- $1.13\ kg.m^2/s$

٥- $mgtd$ عمودياً على مستوى الصفحة والى الخارج

٦- $a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}}$

٧- 4

أسئلة تحدي:

١- أ) $2.86\ m$　　　ب) تبقى نفس القيمة　　　ج) تبقى نفس القيمة

٢- $\frac{14}{5} m r^2$

٣- أ) $\tau = 0.63\ N.m$　　　ب) $L = 0.08\ v$　　　ج) $a = 7.84\ m/s^2$

٤- $W/4$

٥- أ) $1.22\ rad/s$ ب) $0.488\ J$

٦- أ) $\frac{Mg}{2}$ ب) $0.495\ s$ ج) $4.04\ rad/s$

٧- $0.641\ m$

الوحدة العاشرة:

أولاً:

١- أ) $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 12\hat{k}$ ب) $34\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

ج) $2\hat{i} + 24\hat{k}$ د) $40\hat{i} + 184\hat{j} + 36\hat{k}$

القوى الزائفة:

١- $m\ \dot{\vec{\omega}} x \vec{r} = 8\hat{i} - 8\hat{j} - 16\hat{k}$

$$m\ \left(2\vec{\omega} x \dot{\vec{r}}\right) = 96\hat{i} - 48\hat{j} - 40\hat{k}$$

$$m\ \left[\vec{\omega} x\ (\vec{\omega} x \vec{r})\right] = -28\hat{i} + 424\hat{j} + 80\hat{k}$$

$$m\vec{A}_o = 0$$

٢- $\ddot{r} - \omega^2 r = -g\ \sin \omega t$

٣- أ) $\vec{A} = 3\frac{v^2}{R}\hat{i} - \frac{v^2}{b}\hat{k}$ ب) $\vec{A} = -\frac{v^2}{R}\hat{i} + \frac{v^2}{b}\hat{k}$

اختبار مستوى:

الأول:

$$92.8\% \quad , \quad d = 100\ m$$

الثاني:

$$a = 3.25\ m/s^2 , \quad T = 0.192\ N , \quad F_f = 13.01\ N$$

الثالث:

١- أ) $2.94\ N$ ب) $29.4\ N$

٢- أ) $5.89\ m/s^2$ ب) $1.18\ N$

الرابع:

أ) $\beta \leq \alpha$ يبقى الجسم ساكناً، $\beta \succ \alpha$ يتحرك الجسم على القضيب

ب) $r = \dfrac{g}{\omega^2}\tan\left(\alpha \pm \beta\right)$

الخامس:

$$\mu_s \geq 0.2259$$

السادس:

١- $r_o = 4.22\text{x}10^7\ m$

٢- $v_o = R_E\sqrt{g/r_o} = 3.07\text{x}10^3\ m/s$

٣- $L_o = \dfrac{mgR_E^2}{v_o}$, $E_o = -\dfrac{1}{2}mv^2$

السابع:

١- $$y = \frac{(kL + mg) + \sqrt{2mgkL + m^2g^2}}{k}$$

٢- $$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}$$

الثامن:

الحالة الأولى: $v = 0.02\ t$, $t = 5s$

وعندما $t = 5\ s$ فإنّ $S_m = 0.5\ m$, $S_M = 0.25\ m$

وعليه فإنّ $S_m - S_M = 0.25\ m$

الحالة الثانية: $v_m = v_o$, $v_M = 0$, $t = 5\ s$

التاسع:

$$\sin\theta = \frac{1 \pm \sqrt{3 + 4\mu_k}}{2\left(\mu_k^2 + 1\right)}$$

المراجع

المراجع الإنجليزية:

1 - R. A. Serway, "Physics for Scientists and Engineers", 3rd Edition, Saunders College Publishing (1990).

2 - D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, "Fundamentals of Physics", 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc. (1974).

3 - H. D. Young, R. A. Freedman, T. R. Sandinand and A. L. Ford, "University Physics", 9th Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1996).

4 - W. P. Crummet and A. B. Western, "University Physics: Models and Applications", 1st Edition, Wm. C. Brown Publishers (1994).

5 - G. R. Fowels, "Analytical Mechanics", 2nd Edition, Holt Rinehart and Winston, Inc. (1970).

6 - K. R. Symon, "Mechanics", 3rd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1971).

7 - M. R. Spiegel, "Theory and Problems of Theoretical Mechanics", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company (1967).

المراجع العربية:

١- مقدمة في علم الميكانيكا لطلبة العلوم والهندسة، تأليف: أ. د. نبيل اللحام، أ. د. منير دبابنة، أ. د. نبيل أيوب، الناشر: دار البشير - دمشق، الطبعة الأولى (١٩٩٠).

٢- أساسيات الفيزياء الكلاسيكية والمعاصرة، تأليف: أ. د. رأفت كامل واصف، الناشر: دار النشر للجامعات - القاهرة، الطبعة الرابعة (٢٠٠٨).

٣- أساسيات الفيزياء، تأليف: فريدريك ج. بوش، ترجمة: أ. د. سعيد الجزيري، أ. د. محمد أمين سليمان، أ. د. محمد عبدالمقصود النادي، مراجعة: أ. د. أحمد فؤاد باشا، الناشر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية - القاهرة، الطبعة التاسعة (٢٠٠٥).

٤- الفيزياء العامة، تأليف: أ. د. خليل وشاح، أ. د. معروف عبدالله، أ. د. رياض البيطار، الناشر: دار الفكر للنشر والتوزيع - عمان، الطبعة الأولى (٢٠٠٧).

ثبت المطلحات

(عربي - إنجليزي)

(أ)	
إجهاد	Stress
احتكاك	Friction
أملس	Smooth
إحداثي أفقي	Abscissa
إحداثي راسي	Ordinate
ارتفاع	Height
إزاحة	Displacement
استطالة	Extension (Elongation)
استنتاج	Conclusion
أفقي	Horizontal
انفعال	Strain
اهتزاز (تذبذب)	Oscillation
إطار إسناد	Reference Frame

(ب)	
Pendulum	بندول
Simple Pendulum	بندول بسيط
Screw	برغي
Rifle	بندقية

(ت)	
Verification	تحقيق
Distortion	تشويه
Collision	تصادم
Determination	تعيين
Estimation	تقدير
Equilibrium	توازن

(ث)	
Constant	ثابت
Second	ثانية
Load	ثقل (حمل)

(ج)	
Table	جدول
Solid	جسم صلب
Particle	جسيم
Rigid	جاسيء
Ice	جليد
South	جنوب
Joule	جول (وحدة قياس الطاقة)
Part	جزء

(ح)	
Volume	حجم
Elastic Limit	حد المرونة
Motion	حركة
Simple Harmonic Motion (SHM)	حركة توافقية بسيطة
Plane motion	حركة في مستوى
Conservation	حفظ (بقاء)
Ring	حلقة

(خ)	
Error	خطأ
Normal Line	خط متعامد
Straight Line	خط مستقيم
Thread (String)	خيط
Rough	خشن

(د)	
Function	دالة (علاقة رياضية)
Temperature	درجة حرارة
Minute	دقيقة
Merry – Go – Round	دوّامة
Revelution	دورة

(ذ)	
Complete Oscillation	ذبذبة كاملة
Tail	ذيل

(ر)	
Vertical	راسي
Graph	رسم بيناني
Lever	رافعة

(ز)	
Angle	زاوية
Period	زمن دوري
Spring	زنبرك
Mercury	زئبق

(س)	
Negative	سالب
Liquid	سائل
Velocity	سرعة
Relative velocity	سرعة نسبية
Surface	سطح
Free fall	سقوط حر
Wire	سلك
Rest	سكون

(ش)	
Tension	شد
Work	شغل
North	شمال
East	شرق

(ص)	
Solid	صلب (صلد)
Rocket	صاروخ
Small	صغير

(ض)	
Pressure	ضغط
Atmospheric Pressure	ضغط جوي
Side	ضلع

(ط)	
Energy	طاقة
Method	طريقة

Length	طول
Table	طاولة
Long	طويل
Kinetic Energy	طاقة حركة
Potential Energy	طاقة وضع
Mechanical Energy	طاقة ميكانيكية

(ظ)	
Phenomenon	ظاهرة
Shadow	ظل (خيال)
Tangent	ظل الزاوية

(ع)	
Acceleration	عجلة (تسارع)
Acceleration Due To Gravity	عجلة الجاذبية الأرضية
Torque	عزم (عزم القوة)
Moment of Inertia	عزم القصور
Relation	علاقة
Perpendicular	عمودي

Minute Hand	عقرب الدقائق
Title	عنوان

(غ)	
West	غرب
Inelastic	غير مرن

(ف)	
Percent	في المائة (٪)
Physical	فيزيائية

(ق)	
Base	قاعدة
Law	قانون
Power	قدرة
Reading	قراءة
Inertia	قصور ذاتي
Rod	قضيب
Force	قوة

Measurement	قياس
Value	قيمة
Mean value	قيمة متوسطة
Missile	قذيفة
Moon	قمر

(ك)	
Mass	كتلة
Density	كثافة
Sphere	كرة
Pendulum Bob	كرة البندول
Spherical	كروي
Quantity	كمية
Momentum	كمية حركة
Kilogram	كيلوغرام
Planet	كوكب

(ل)	
Board	لوح
Plank	لوح خشب

(م)	
Vector	متجه
Meter	متر
Proportional	متناسب
Mean	متوسط
Gravitational field	مجال الجاذبية الأرضية
Collimator	مجمع
Resultant	محصلة
Axis	محور
Elastic	مرن
Area	مساحة
Cross Sectional Area	مساحة المقطع
Distance	مسافة
Plane	مستوى
Ruler	مسطرة
Lift	مصعد
Coefficient	معامل
Young's Modulus	معامل ينج
Calibration	معايرة

Metal	معدن
Rate of Change	معدل تغير
Immersed	مغمور
Absolute	مطلق
Comparison	مقارنة
Cross Section	مقطع عرضي
Tangent	مماس
Curve	منحنى
Positive	موجب
Mile	ميل (وحدة قياس طول)
Position	موضع
Mechanics	ميكانيكي
Slider	منزلق

(ن)	
Results	نتائج
Percentage	نسبة مئوية
Radius	نصف قطر
Isolated System	نظام معزول

Theory	نظرية
Point	نقطة
Origin	نقطة الأصل

(هـ)	
Air	هواء

(و)	
Units	وحدات
Arbitrary Unit	وحدة خياريه
Graph Paper	ورقة رسم بياني
Units	وحدات

(ي)	
Right	يمين
Left	يسار
Rebound	يرتد